О. Б. Полубасов   14.11.2016 г.

===========MM218================
MM218 (5 баллов)
От двух до пяти.
Решения принимаются до 12.11.2016
Найти наименьшее возможное количество диагоналей многогранника, имеющего 2017 ребер.
============================

Пусть v – число вершин многогранника, f – число граней, e – число рёбер, d – число диагоналей. Существуют только многогранники с $e = 6$ или $e \geq 8$.

Пусть $H = \{h_i,\ i = 1..f\}$ – вектор степеней граней, упорядоченных по невозрастанию, $h_{i+1} \leq h_i$, $3 \leq h_i \leq v - 1$.

Формула Эйлера: $f = e + 2 - v$. (1)

$$\sum_{i=1}^{f} h_i = 2e. \tag{2}$$

`Всего неупорядоченных пар вершин: $v(v-1)/2$. Из них e рёбер и $\sum_{i=1}^{f} \frac{h_i(h_i-3)}{2}$ диагоналей граней. Следовательно, число диагоналей равно

$$d = \frac{1}{2}\left(v(v-1) - 2e - \sum_{i=1}^{f} h_i(h_i-3)\right). \tag{3}$$

Две любые грани могут иметь не более двух общих вершин, иначе они бы лежали в одной плоскости. Никакие три грани не могут иметь двух общих вершин. Поэтому:

$$h_2 \leq v + 2 - h_1,$$
$$h_3 \leq v + 6 - h_1 - h_2. \tag{4}$$

Условия (1) – (5) являются только необходимыми, но не достаточными, их выполнение ещё не гарантирует существование многогранника с заданным вектором степеней граней.

План решения задачи таков: *найти вектор, минимизирующий число диагоналей d (чисто формально), а затем убедиться в существовании многогранника, имеющего такой вектор степеней граней. Существование многогранников, соответствующих проигравшим векторам, проверять и требовать не будем (будем, только если это нам выгодно).*

1. Рассмотрим семейство векторов $H_1 = \{ v\text{-}1,\ldots\}$

По формуле (4), $h_2 \leq 3$, а значит, перед нами (v-1)-угольная пирамида. Она имеет $e = 2v$-2 ребра, а диагоналей не имеет. Таким образом, для любого чётного $e \geq 6$ минимально возможное число диагоналей $d = 0$.

2. Рассмотрим семейство векторов $H_2 = \{ v\text{-}2,\ldots\}$

По формуле (4), $h_2 \le 4$, $h_3 \le 4$. Если $h_2 = h_3 = 4$, то грани f_1, f_2 и f_2 имеют попарно по две общие вершины, а значит, грань f_4 может иметь не более одной общей вершины с каждой из них, поэтому $h_4 \le 3$.

$$H_2 = \{v-2, \underbrace{4,\ldots 4}_{n \text{ раз}}, 3 \ldots\}, \text{где } 0 \le n \le 2.$$

По формуле (2): $(v-2) + 4n + 3(e + 1 - n - v) = 2e$, => $v = \frac{e+n+1}{2}$.
По формуле (3): $d = \frac{1}{2}(v^2 - v - 2e - (v-2)(v-5) - 4n) =$
$$= \frac{1}{2}(6v - 2e - 4n - 10) = \frac{e-2n-5}{2} \ge \frac{e-9}{2}.$$

Наименьшее число диагоналей $d = \frac{e-9}{2}$ получается при $n = 2$. Соответствующие многогранники построим в разделе 5, а пока запомним этот рекорд для нечётного числа рёбер.

3. Рассмотрим семейство векторов $H_3 = \{ v\text{-}3,\ldots\}$

По формуле (4), $h_2 \le 5$, $h_3 \le 4$, поэтому

$$H_3 = \{v-3, \underbrace{5,\ldots 5}_{n \text{ раз}}, 4,\ldots 4, \underbrace{3,\ldots 3}_{m \text{ раз}}\},\ \ 0 \ \le n \ \le\ 1.$$

По формуле (2): $(v-3) + 5n + 4(e - v - n - m + 1) + 3m = 2e$.
=> $3v = 2e + n - m + 1$.

По формуле (3):
$$d = \frac{1}{2}(v^2 - v - 2e - (v-3)(v-6) - 5*2n - 4(e - v - n - m + 1)) =$$
$$= \frac{1}{2}(12v - 6e - 6n + 4m - 22) = e - n - 9 \ge e - 10.$$

Любопытно, что результат не зависит от значения m. Наименьшее число диагоналей $d = e - 10$ получается при $n = 1$. Так как $e > 11$, то это больше, чем результат предыдущего раздела, то есть, рекорд остался не побитым.

4. Рассмотрим семейство векторов $H_{k-1} = \{ v\text{-}k\text{+}1,\ldots\}$, $k \ge 5$

По формуле (4), $h_2 \le k + 1$. Если $h_2 = k + 1$, то $h_3 \le 4$.
Вектор $H_{k-1,1} = \{ v\text{-}k\text{+}1, k\text{+}1, h_3,\ldots\}$ даёт большее значение d, чим вектор $H_3 = \{ v\text{-}3, 5, h_3,\ldots\}$. Действительно, число (f) и сумма (2e) элементов у векторов одинаковы (а значит, одинаково и число вершин v), а $(v\text{-}k\text{+}1)(v\text{-}k\text{-}2) + (k\text{+}1)(k\text{-}2) < (v\text{-}3(v\text{-}6) + 10$. По формуле (3), число диагоналей $d(H_{k-1,1}) > d(H_3)$.

Рассмотрим семейство векторов $H_{k-1,2} = \{v - k + 1, \underbrace{k, \dots k}_{n \text{ раз}}, 3, \dots\}$.

По формуле (2): $(v - k + 1) + nk + 3(e - v - n + 1) = 2e$.

$$\Rightarrow 2v = e + (k - 3)n - k + 4.$$

По формуле (3):

$$d = \frac{1}{2}(v^2 - v - 2e - (v - k + 1)(v - k - 2) - k * (k - 3)n) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2kv - 2e - k * (k - 3)n - (k - 1)(k + 2)\right) = \frac{(k-2)e - 2k^2 + 3k + 2}{2}.$$

Так как $\frac{(k-2)e-2k^2+3k+2}{2} > \frac{e-9}{2}$ при $k > 3$, то рекорд не побит.

Заметим, что при указанном виде вектора $H_{k-1,2}$ результат не зависит от значения n (хотя не при всех значениях n многогранники существуют).

Векторы, имеющие промежуточные степени граней (больше 3 но меньше k), дают большее число диагоналей, чем $H_{k-1,2}$.

Доказательство.

Пусть в векторе имеется пара элементов a и b: $k > a \geq b > 3$.

Если $a + b = k + 3$, то заменив элементы a и b на k и 3, мы оставим сумму элементов вектора (а значит, и значения e, f и v) неизменной, а величину d уменьшим, так как $k(k - 3) + 3(3 - 3) > a(a - 3) + b(b - 3)$.

Если $a + b > k + 3$, то заменим элементы a и b на k и $a+b-k > 3$.

Если $a + b < k + 3$, то заменим элементы a и b на $a+b-3 < k$ и 3.

Продолжая, пока возможно, получим вектор, в котором не более одного элемента отлично от k и 3.

$H_{k-1,3} = \{v - k + 1, \underbrace{k, \dots k}_{n \text{ раз}}, x, 3, \dots\}$, $3 < x < k$.

По формуле (2): $(v - k + 1) + nk + x + 3(e - v - n) = 2e$.

$$\Rightarrow 2v = e + (k - 3)n - k + x + 1.$$

По формуле (3):

$$d = \frac{1}{2}(v^2 - v - 2e - (v - k + 1)(v - k - 2) - k * (k - 3)n - x(x - 3)) =$$
$$= \frac{1}{2}(2kv - 2e - k * (k - 3)n - (k - 1)(k + 2) - x(x - 3)) =$$
$$= \frac{(k-2)e - 2k^2 + 3k + 2 + (k - x)(x - 3)}{2} > \frac{(k-2)e - 2k^2 + 3k + 2}{2}.$$

5. Построение многогранников, соответствующих вектору H_2

Вершины основания занумерованы подряд от 1 до n. Вне основания лежат две вершины, обозначим их A и B. Вершина A соединена с вершинами от 1 до k основания, $2 \leq k \leq n-1$, а вершина B – с вершинами от k+1 до n (рис. 1).

Многогранник имеет $v = n+2$ вершины, $e = 2n+1$ ребро, $f = n+1$ грань и $d = n-4 = (e - 9)/2$ диагонали.

Рассматриваемый многогранник существует при любом $n \geq 4$, то есть, при любом нечётном $e \geq 9$. Выбирая различные k, получим $[n/2]-1$ неизоморфных многогранника.

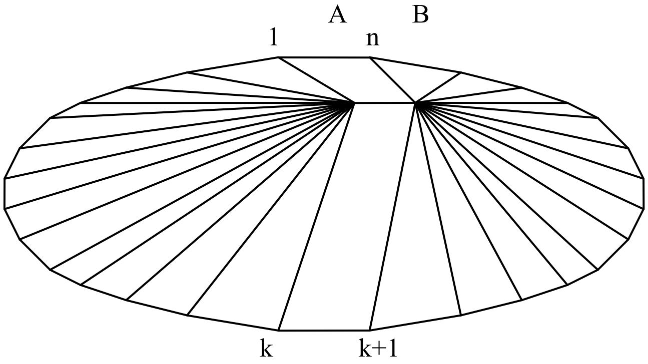

Рис. 1. Многогранник, имеющий наименьшее число диагоналей при заданном нечётном числе рёбер.

Ответ. Если число рёбер равно 2017, то наименьшее число диагоналей равно 1004. Существуют 503 различных многогранника с таким числом рёбер и диагоналей.

Примечание. План решения подсказало название задачи. За это автору задачи отдельное спасибо!