О. Б. Полубасов   25.11.2016 г.

===========MM219===============
MM219 (8 баллов)
Решения принимаются до 26.11.2016
Какое наибольшее количество диагоналей может иметь одиннадцатигранник?
===========================

Пусть v – число вершин многогранника, f – число граней, e – число рёбер, d – число диагоналей, h_i – число углов грани i.

Всего неупорядоченных пар вершин: $v(v-1)/2$. Из них e рёбер и $\sum_{i=1}^{f}\frac{h_i(h_i-3)}{2}$ диагоналей граней. Следовательно, число диагоналей равно $d=\frac{v(v-1)}{2}-e-\sum_{i=1}^{f}\frac{h_i(h_i-3)}{2}=\frac{1}{2}\left(e^2+7e-2fe+f^2-3f+2-\sum_{i=1}^{f}h_i^2\right)$.

Поскольку $\sum_{i=1}^{f}h_i=2e$, а минимум суммы квадратов достигается, когда все h_i отличаются как можно меньше, то $h_i\cong\frac{2e}{f}$, $\sum_{i=1}^{f}h_i^2\cong\frac{4e^2}{f}$, а значит, $d(e)\cong\frac{1}{2}\left(e^2\left(1-\frac{4}{f}\right)+e(7-2f)+f^2-3f+2\right)$.

Допустимый интервал значений количества рёбер $\frac{3f}{2}\le e\le 3f-6$ целиком лежит на восходящей ветви параболы, следовательно, максимум d достигается на правом конце интервала. То есть, число рёбер равно e = 3f – 6, а степени всех вершин равны 3.

Тогда $\sum_{i=1}^{f}h_i=2e=6f-12$, а так как все h_i должны быть целыми, то

$$\left\lfloor 6-\frac{12}{f}\right\rfloor\le h_i\le\left\lceil 6-\frac{12}{f}\right\rceil. \qquad (1)$$

Получаются следующие теоретические максимумы.

f	v	e	h_i	d	Примечание
4	4	6	4x3	0	тетраэдр
5	6	9	2x3 + 3x4	0	треугольная призма
6	8	12	6x4	4	четырёхугольная призма
7	10	15	5x4 + 2x5	10	пятиугольная призма
8	12	18	4x4 + 4x5	20	
9	14	21	3x4 + 6x5	34	
10	16	24	2x4 + 8x5	52	
11	18	27	1x4 + 10x5	74	
12	20	30	12x5	100	додекаэдр
13	22	33	12x5 + 6	129	
f > 13	2f – 4	3f – 6	12x5 + (f – 12)x6	$2f^2$ – 21f + 64	

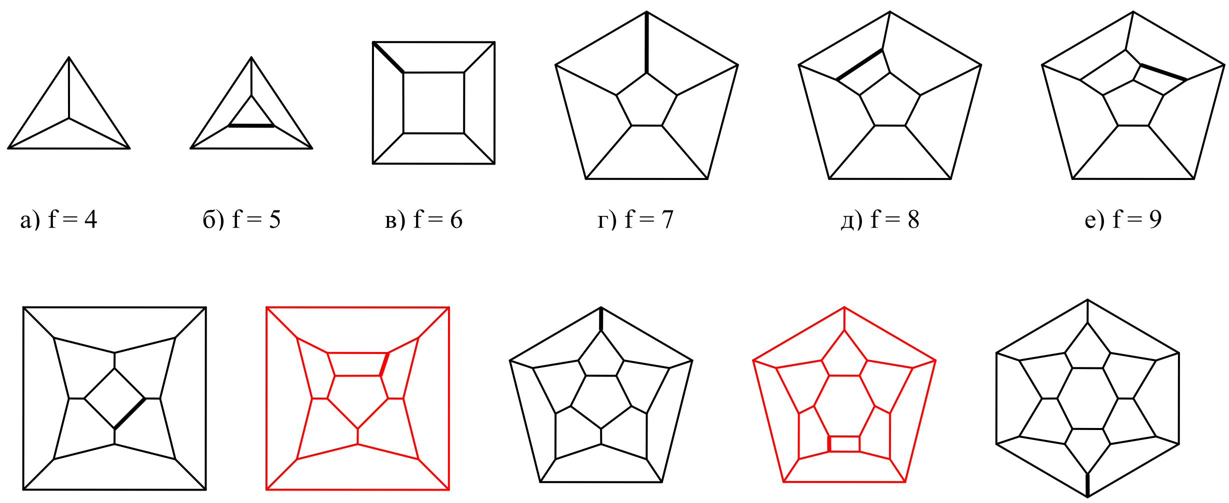
Таб. 1. Теоретический максимум числа диагоналей.

Реальные максимумы числа диагоналей приведены в таблице 2. Оказывается, что в двух случаях (а именно, для числа граней 11 и 13) не существует многогранников, имеющих теоретический максимум количества диагоналей (далее – ТМКД).

f	**v**	**e**	**h_i**	**d**	**Количество различных многогранников**	**Схема построения**
4	4	6	4x3	0	1	-
5	6	9	2x3 + 3x4	0	1	3 + 3 + 3 => 3 + 4 + 4 + 4
6	8	12	6x4	4	1	4 + 3 + 3 => 4 + 4 + 4 + 4
7	10	15	5x4 + 2x5	10	1	4 + 4 + 4 => 4 + 4 + 5 + 5
8	12	18	4x4 + 4x5	20	1	-//-
9	14	21	3x4 + 6x5	34	1	5 + 4 + 4 => 5 + 4 + 5 + 5
10	16	24	2x4 + 8x5	52	1	-//-
11	18	27	2x4 + 8x5 + 6	73	1	5 + 4 + 5 => 5 + 4 + 5 + 6
12	20	30	12x5	100	1	6 + 4 + 4 => 5 + 5 + 5 + 5
13	22	33	4 + 10x5 + 2x6	128	1	5 + 5 + 5 => 5 + 4 + 6 + 6
14	24	36	12x5 + 2x6	162	1	6 + 4 + 5 => 5 + 5 + 5 + 6
15	26	39	12x5 + 3x6	199	1	6 + 5 + 5 => 5 + 5 + 6 + 6
16	28	42	12x5 + 4x6	240	2	-//-
17	30	45	12x5 + 5x6	285	3	-//-
18	32	48	12x5 + 6x6	334	6	-//-
19	34	51	12x5 + 7x6	387	6	-//-
20	36	54	12x5 + 8x6	444	15	-//-
21	38	57	12x5 + 9x6	505	17	-//-
22	40	60	12x5 + 10x6	570	40	-//-

Таб. 2. Действительный максимум числа диагоналей.

Лирическое отступление: красавцы рис. 1 ж, и, л, образованные двумя n-угольными гранями и 2n пятиугольными, образуют бесконечную серию, так же, как антипризмы и призмы, и, наверняка, имеют специальное название. Правда, эти многогранники не являются вершинно-транзитивными.



а) f = 4 б) f = 5 в) f = 6 г) f = 7 д) f = 8 е) f = 9

ж) f = 10 з) f = 11 и) f = 12 к) f = 13 л) f = 14

Рис. 1. Многогранники с максимальным числом диагоналей для $4 \leq f \leq 14$.

Рассмотрим два преобразования, показанных на рис. 2. Эти преобразования заключаются в подразбиении грани на две, в результате чего в многогранник добавляется одна грань, две вершины и три ребра, то есть, число рёбер остаётся максимально возможным (если было таковым). Чтобы и число диагоналей было максимально возможным, необходимо соблюдение условия (1).

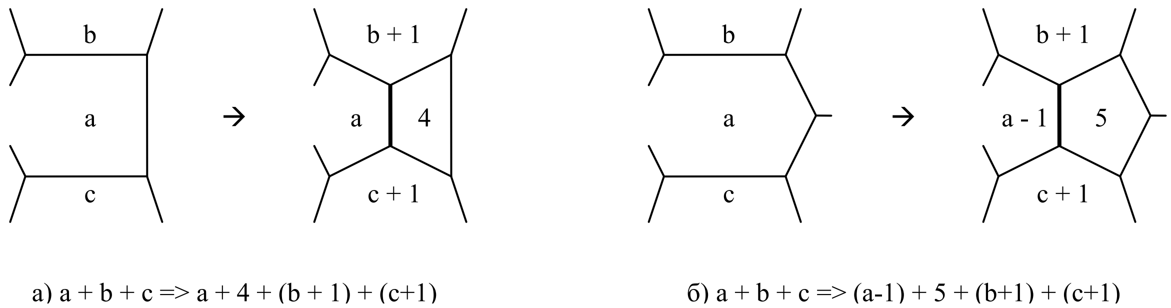


Рис. 2. Два полезных способа разделения грани ребром.

Многогранники с ТМКД и числом граней от 4 до 10 (рис 1. а – ж) являются единственными, с точностью до изоморфизма. При этом каждый из них можно получить из предыдущего с помощью преобразования, показанного на рис. 2. а. Значения параметров a, b и c преобразований приведены в последнем столбце таблицы 2.

Чтобы таким же способом превратить 10-гранник в 11-гранник, необходимо применить преобразование (5 + 4 + 4 => 5 + 4 + 5 + 5). Для этого необходимо, чтобы у 10-гранника нашлись две четырёхугольные грани, разделённые пятиугольной, но таких нет, так как между двумя четырёхугольными гранями 10-гранника (рис. 2. ж) расположены два слоя пятиугольных граней.

Это рассуждение не доказывает невозможность построения 11-гранника, имеющего ТМКД (невозможность доказана машинным перебором), но объясняет, почему его нельзя получить описанным способом. То же самое касается и 13-гранника. Чтобы описанным способом превратить 10-гранник в 11-гранник, необходимо применить преобразование (6 + 5 + 5 => 5 + 5 + 6 + 6), но у 12-гранника (рис 2. и) нет шестиугольных граней.

Утверждение 1.

Число многогранников, имеющих ТМКД, бесконечно.

Доказательство.

На рис. 3. а) показана боковая поверхность 14-гранника рис. 2. л), шестиугольные основания не показаны. Легко видеть, что между двумя слоями пятиугольных граней можно добавить сколько угодно слоёв шестиугольных граней, а значит, построить многогранники для $f = 6k + 14$, $k \geq 0$. Общая формула для всех этих многогранников приведена в последней строке таблицы 1.

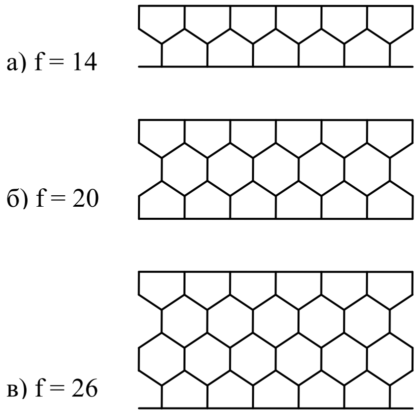


Рис. 3. Боковые поверхности многогранников, имеющих число граней $f = 6k + 14$, $k \geq 0$.

Утверждение 2.

Для любого $f \geq 14$ существует хотя бы один f-гранник, имеющий ТМКД.

Доказательство.

В доказательстве утверждения 1 мы рассматривали боковые поверхности многогранников, а теперь рассмотрим их «шапочки», то есть, шестиугольные основания вместе с прилегающими к ним шестью пятиугольными гранями.

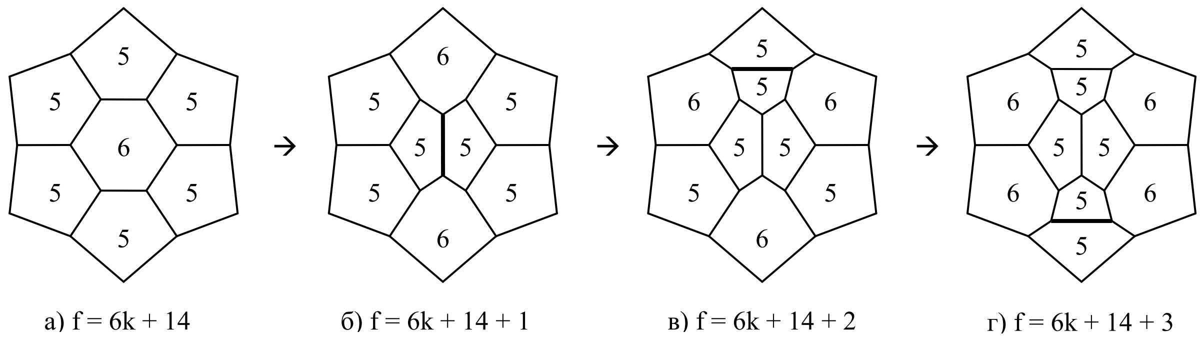
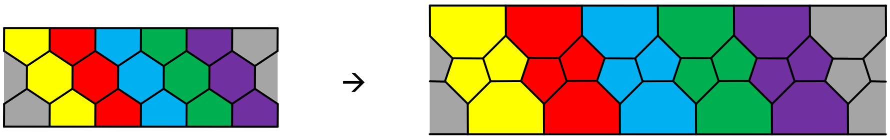


Рис. 4. Три последовательных преобразования «шапочки».

Как видно из рис. 4, к «шапочке» можно применить три преобразования (6 + 5 + 5 => 5 + 5 + 6 + 6) подряд, каждый раз получая многогранник с ТМКД на 1 большего размера, а так как «шапочек» две, то можно получить и следующие три многогранника.

При построении и анализе таблицы 2 теплилась надежда, что цепочка преобразований, приведённая в последнем столбце таблицы, может быть продолжена бесконечно. Но, по-видимому, это не так. На рис. 4 видно, что в результате применения преобразований пятиугольники, которые были разделены шестиугольником, перемещаются внутрь и становятся смежными, поэтому цепочка заканчивается. Можно предположить, что цепочка наибольшей длины (12) получается из 14-гранника, впрочем, это открытый вопрос.

На рис. 5 показано красивое преобразование боковой поверхности 20-гранника за шесть ходов.



в) f = 20　　　　　б) f = 26

Рис. 5. Преобразование боковой поверхности 20-гранника за шесть ходов.

Выводы.

Многогранники с теоретически максимальным количеством диагоналей – очень красивые объекты. Исследование этих многогранников и отношений между ними может быть весьма занимательным.

Доказано, что многогранники с теоретически максимальным количеством диагоналей существуют для любого числа граней $f \geq 4$, кроме $f = 11$ и $f = 13$.

Ответ. Одиннадцатигранник может иметь 73 диагонали, но не больше. Такой 11-гранник единственный, с точностью до изоморфизма каркасов.