О. Б. Полубасов   20.12.2016 г.

===========MM220===============

MM220 (15 баллов)

Решения принимаются до 17.12.2016

Найти наименьшее v такое, что существует многогранник, имеющий v вершин и 2016 диагоналей, а многогранника, имеющего v+1 вершину и 2016 диагоналей, не существует.

==========================

Пусть v – число вершин многогранника, f – число граней, e – число рёбер, d – число диагоналей, $H = \{h_i,\ i = 1..f\}$ – вектор степеней граней, упорядоченный по невозрастанию, $h_{i+1} \le h_i$, $h_i \ge 3$.

Если задаться значением v, то $e = 3\mathrm{v} - 6 - \sum_{i=1}^{f}(h_i - 3)$.

Тогда число диагоналей равно

$$d = \frac{v(v-1)}{2} - e - \frac{\sum_{i=1}^{f} h_i(h_i-3)}{2} = \frac{(v-3)(v-4)}{2} - \sum_{i=1}^{f}\frac{(h_i-2)(h_i-3)}{2} \qquad (1)$$

Для существования многогранников с ненулевым числом диагоналей, числом вершин v и заданным вектором степеней H необходимо и достаточно выполнения неравенств (2)(3)(4) и равенства (5).

$$\mathrm{f} \ge \frac{v}{2} + 2. \qquad (2)$$

$$h_1 \le \mathrm{f} - 1. \qquad (3)$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}(\mathrm{h_i} - 4) \le \mathrm{v} - 6,\ \forall \mathrm{k} = 1..\mathrm{f}. \qquad (4)$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{f}}(\mathrm{h_i} - 2) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{f} = 2\mathrm{v} - 4. \qquad (5)$$

Из (1) видно, что при заданном числе вершин максимальное число диагоналей $d_{max} = \frac{(v-3)(v-4)}{2}$ достигается, когда все грани треугольные. В отличие от MM218 и MM219, формула верна для любых v ≥ 4 и не имеет исключений. Число $2016 = \frac{64*63}{2}$ – как раз треугольное, так что многогранник, имеющий 67 вершин, может иметь ровно 2016 диагоналей, а все многогранники, имеющие меньше 67 вершин, имеют меньше 2016 диагоналей.

Из решения задачи MM218 известно, что максимальное число вершин многогранника при заданном ненулевом числе диагоналей равно v_{max} = d + 6 = 2022.

Поскольку $h_1 \leq v - 2$, то введём параметр $t = v - 1 - h_1$, $t \geq 1$ и проанализируем, в каких пределах может находиться v при том или ином значении t. Из (1) следует:

$$\frac{(v-3)(v-4)}{2} - \frac{(v-t-3)(v-t-4)}{2} = d + \sum_{i=2}^{f} \frac{(h_i-2)(h_i-3)}{2},$$

то есть:

$$v = \frac{d + \frac{t(t+1)}{2} + \sum_{i=2}^{f} \frac{(h_i-2)(h_i-3)}{2}}{t} + 3. \quad (6)$$

Для того чтобы выполнялось: $2(v-3)t \geq 2d + t^2 + t$, необходимо чтобы дискриминант квадратного неравенства $t^2 - (2v-7)t + 2d \leq 0$ был положительным, то есть, $v \geq \sqrt{2d} + 3.5$. Следовательно, $t \leq \sqrt{2d}$.

Положив $d = 2016$, получаем: $t \leq 63$, $v \geq 67$.

Минимальные значения v(t)

Для минимизации v(t) необходимо минимизировать числитель правой части в выражении (6). Обозначим: $k = \sum_{i=2}^{f} \frac{(h_i-2)(h_i-3)}{2}$. Числитель должен делиться на t, поэтому:

$$k = t - 1 - \left(\left(d + \frac{t(t+1)}{2} - 1\right) mod\ t\right) \leq t - 1.$$

Тогда

$$v_{min}(t) = \frac{d+k}{t} + \frac{t+1}{2} + 3 = \left\lceil \frac{d}{t} + \frac{t+1}{2} \right\rceil + 3. \quad (7)$$

Возьмём вектор степеней вершин

$$H_{min} = \{h_1,\ \underbrace{4, \dots 4}_{k \text{ раз}},\ \underbrace{3, \dots 3}_{f-k-1 \text{ раз}}\},\ \text{где } h_1 = v - 1 - t, f = v + t - k. \quad (8)$$

По построению, неравенства (2)(3)(4) выполняются. Проверим выполнение равенства (5): $\sum_{i=1}^{f}(h_i - 2) = (h_1 - 2) + 2k + (f - k - 1) = 2v - 4$, так что многогранники, соответствующие вектору степеней (8), существуют.

Узнаем, какие значения v покрываются выражением (7) подряд, без пропусков. Для этого надо найти решения неравенства

$$v_{min}(t) - v_{min}(t+1) \leq 1, \text{ то есть, } \left\lceil 3 + \frac{t+1}{2} + \frac{d}{t} \right\rceil - \left\lceil 3 + \frac{t+2}{2} + \frac{d}{t+1} \right\rceil \leq 1.$$

Неравенства, содержащие округления вверх, в общем виде решать не просто, но гарантированно подходящие значения t даст решение неравенства $\left(\frac{t+1}{2}+\frac{d}{t}\right)-\left(\frac{t+2}{2}+\frac{d}{t+1}\right)\leq 1$. Решая, получаем: $t \geq \sqrt{\frac{2d}{3}+\frac{1}{4}} - 0.5.$ (9)

Положив d = 2016, получим: t ≥ 37, а точное значение 34 даст численная проверка (таб. 1).

t	$3+\frac{t+1}{2}+\frac{d}{t}$	$v_{min}(t)$
39	74.69	75
38	75.55	76
37	76.48	77
36	77.50	78
35	78.60	79
34	79.79	80
33	81.09	82

Таб. 1.

Максимальные значения v(t)

Для максимизации v(t) необходимо максимизировать числитель правой части в выражении (6). Для этого большие члены суммы (в первую очередь, h_2) следует сделать как можно больше.

Максимальное значение $h_2 = v + 2 - h_1 = t + 3$ (но должно быть: $h_2 \leq h_1$).

Если $h_1 + h_2 = v + 2$, то $h_3 \leq 4$. Возьмём вектор степеней вершин

$$H_{max} = \{h_1,\ h_2,\ \underbrace{4, \dots 4}_{k \text{ раз}},\ \underbrace{3, \dots 3}_{f-k-2 \text{ раза}}\},\ k \geq 1. \qquad (10)$$

Числитель выражения (6) должен делиться на t, поэтому:

$$k = t - (d \bmod t) \leq t.$$

Тогда

$$v_{max}(t) = \frac{d+k}{t} + t + 4 = \left\lceil \frac{d+1}{t} \right\rceil + t + 4 \qquad (11)$$

Положим $f = v - 1 - k \geq v - 1 - t = h_1 \geq h_2 = t + 3 \geq k + 3.$

По построению, неравенства (2)(3)(4) выполняются. Проверим выполнение равенства (5): $\sum_{i=1}^{f}(h_i - 2) = (h_1 - 2) + (h_2 - 2) + 2k + (f - k - 2) = 2v - 4$, так что многогранники, соответствующие вектору степеней (10), существуют, если $t + 3 = h_2 \leq h_1 = v - 1 - t$, то есть, $t \leq \sqrt{d + 0.25} + 0.5.$ (12)

Положив d = 2016, получим: t ≤ 45.

Если t больше величины (12), то общей формулы для вектора степеней нет, но выводить её и не требуется, поскольку (12) > (9) для любого d.

Промежуточные значения v, $v_{min}(t) < v < v_{max}(t)$

Бросается в глаза похожесть формул (8) и (10), поэтому векторы степеней вершин для промежуточных значений v будем строить с помощью формулы (13), обобщающей формулы (8) и (10).

$$H = \{h_1,\ h_2,\ \underbrace{4,\dots 4}_{k\ \text{раз}},\ \underbrace{3,\dots 3}_{f-k-2\ \text{раза}}\ \}. \tag{13}$$

Как прежде, $h_1 = v - 1 - t$. Найдём максимальное значение h_2, такое что

$\frac{(h_2-2)(h_2-3)}{2} \leq (v-3)t - \frac{t(t+1)}{2} - d$, то есть, $h_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{8(v-3)t-4t(t+1)-8d+1}-5}{2} \right\rfloor$.

Числитель выражения (6) должен делиться на t, поэтому:

$$k = t - 1 - \left(\left(d + \frac{t(t+1)}{2} + \frac{(h_2-2)(h_2-3)}{2} - 1\right) mod\ t\right) \leq t - 1.$$

Положим $f = v + 3 + t - k - h_2 \geq v + 2 - h_2 \geq h_1$.

По построению, неравенства (2)(3)(4) выполняются. Проверим выполнение равенства (5): $\sum_{i=1}^{f}(h_i - 2) = (h_1 - 2) + (h_2 - 2) + 2k + (f - k - 2) = 2v - 4$, так что многогранники, соответствующие вектору степеней (13), существуют.

Ответ на вопрос задачи

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти наибольшее значение t, при котором $v_{min}(t-1) - v_{max}(t) \geq 2$, то есть, $\left\lceil 3 + \frac{t}{2} + \frac{d}{t-1} \right\rceil - \left\lceil \frac{d+1}{t} \right\rceil - t - 4 \geq 2$.

Это уравнение проще всего решать численно. Подставляя d = 2016, получим: t = 14, v = 163 (таб. 2).

t	$3 + \frac{t+1}{2} + \frac{d}{t}$	$4 + t + \frac{d+1}{t}$	$v_{min}(t)$	$v_{max}(t)$
16	137.5	146.1	138	147
15	145.4	153.5	146	154
14	154.5	162.1	155	163
13	165.1	172.2	166	173

Таб. 2.

Для 163 вершин и 2016 диагоналей существует единственный вектор степеней вершин:

$$H_{max}(t = 14) = \{148, 17,\ \underbrace{4,\dots 4}_{14\ \text{раз}},\ \underbrace{3,\dots 3}_{133\ \text{раза}}\}.$$

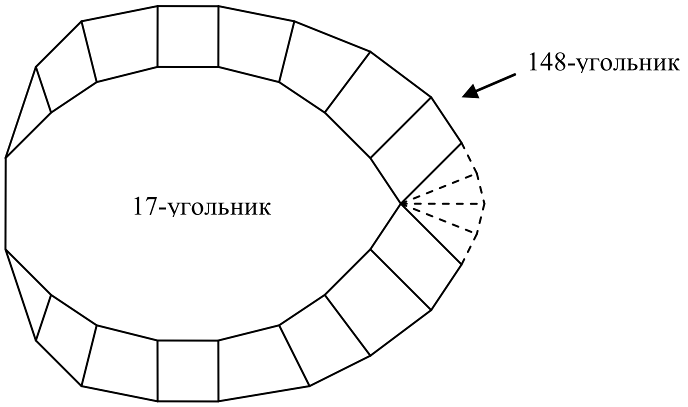

Рис. 1. 149-гранник, имеющий 163 вершины и 2016 диагоналей.

Один из подходящих 149-гранников показан на рис. 1, а всего неизоморфных многогранников ровно столько, сколько существует способов распределить 133-2=131 треугольную грань по 15 промежуткам по бокам четырёхугольных граней, с учётом порядка промежутков, но без учёта направления, то есть,

$$\frac{P(131,14)+P(65,7),}{2} = \frac{C_{145}^{14}+C_{72}^{7}}{2} = \frac{145!}{131!\cdot 14!\cdot 2} + \frac{72!}{65!\cdot 7!\cdot 2} = 544855297822542232.$$

Ответ. v = 163.

Найдены и доказаны возможные соотношения между количествами вершин и диагоналей выпуклых многогранников. Разработан способ построения многогранников простого вида с заданными числами вершин и диагоналей.

Приложение. Диапазоны значений числа вершин v в зависимости от значения t, если число диагоналей d = 2016.

t	$v_{min}(t)$	$v_{max}(t)$	H_{min}	H_{max}
63	67	70	{130*3}	{32*6, 3*4, 2*3}
62	68	70	{5, 61*4, 7*3}	{7, 30*6, 5, 2*4, 2*3}
61	68	72	{6, 58*4, 12*3}	{11*10, 22*4, 8*3}
60	68	72	{7, 54*4, 19*3}	{11, 9*10, 9, 21*4, 26*3}
59	68	74	{8, 49*4, 28*3}	{6*14, 12, 28*4, 6*3}
58	68	75	{9, 43*4, 39*3}	{5*16, 13, 30*4, 5*3}
57	68	76	{10, 36*4, 52*3}	{5*18, 12*4, 44*3}
56	68	76	{11, 28*4, 67*3}	{19, 3*18, 17, 11*4, 44*3}
55	68	78	{12, 19*4, 84*3}	{3*22, 21, 5, 15*4, 40*3}
54	68	78	{13, 9*4, 103*3}	{23, 3*21, 6, 30*4, 10*3}
53	69	79	{15, 51*4, 19*3}	{25, 2*24, 16, 28*4, 17*3}
52	69	83	{16, 38*4, 44*3}	{2*30, 29, 37*4, 5*3}
51	69	83	{17, 24*4, 71*3}	{31, 2*28, 36*4, 7*3}
50	69	83	{18, 9*4, 100*3}	{32, 29, 28, 33*4, 13*3}
49	70	83	{20, 42*4, 34*3}	{33, 2*28, 29*4, 21*3}
48	70	84	{21, 24*4, 69*3}	{35, 34, 21, 29*4, 22*3}
47	70	86	{22, 5*4, 106*3}	{2*38, 16, 36*4, 10*3}
46	71	88	{24, 31*4, 54*3}	{2*41, 12, 27*4, 30*3}

t	$v_{min}(t)$	$v_{max}(t)$	H_{min}	H_{max}
45	71	94	{25, 9*4, 97*3}	{48, 48, 9*4, 74*3}
44	72	94	{27, 30*4, 55*3}	{49, 47, 8*4, 76*3}
43	72	94	{28, 5*4, 104*3}	{50, 46, 5*4, 82*3}
42	73	95	{30, 21*4, 72*3}	{52, 45, 42*4, 9*3}
41	74	95	{32, 34*4, 46*3}	{53, 44, 34*4, 25*3}
40	74	95	{33, 4*4, 105*3}	{54, 43, 24*4, 45*3}
39	75	95	{35, 12*4, 89*3}	{55, 42, 12*4, 69*3}
38	76	96	{37, 17*4, 79*3}	{57, 41, 36*4, 22*3}
37	77	96	{39, 19*4, 75*3}	{58, 40, 19*4, 56*3}
36	78	97	{41, 18*4, 77*3}	{60, 39, 36*4, 23*3}
35	79	97	{43, 14*4, 85*3}	{61, 38, 14*4, 67*3}
34	80	98	{45, 7*4, 99*3}	{63, 37, 24*4, 48*3}
33	82	99	{48, 30*4, 54*3}	{65, 36, 30*4, 37*3}
32	83	100	{50, 16*4, 82*3}	{67, 35, 32*4, 34*3}
31	85	101	{53, 30*4, 55*3}	{69, 34, 30*4, 39*3}
30	86	102	{55, 9*4, 97*3}	{71, 33, 24*4, 52*3}
29	88	103	{58, 14*4, 88*3}	{73, 32, 14*4, 73*3}
28	90	105	{61, 14*4, 89*3}	{76, 31, 28*4, 47*3}
27	92	106	{64, 9*4, 100*3}	{78, 30, 9*4, 86*3}
26	95	108	{68, 25*4, 70*3}	{81, 29, 12*4, 82*3}
25	97	110	{71, 9*4, 103*3}	{84, 28, 9*4, 90*3}
24	100	113	{75, 12*4, 99*3}	{88, 27, 24*4, 63*3}
23	103	115	{79, 8*4, 109*3}	{91, 26, 8*4, 97*3}
22	107	118	{84, 19*4, 90*3}	{95, 25, 8*4, 100*3}
21	110	122	{88, 130*3}	{100, 24, 21*4, 78*3}
20	115	125	{94, 14*4, 106*3}	{104, 23, 4*4, 115*3}
19	120	130	{100, 17*4, 104*3}	{110, 22, 17*4, 94*3}
18	125	135	{106, 9*4, 124*3}	{116, 21, 18*4, 97*3}
17	131	140	{113, 7*4, 133*3}	{122, 20, 7*4, 124*3}
16	138	147	{121, 8*4, 137*3}	{130, 19, 16*4, 113*3}
15	146	154	{130, 9*4, 142*3}	{138, 18, 9*4, 134*3}
14	155	163	{140, 7*4, 154*3}	{148, 17, 14*4, 133*3}
13	166	173	{152, 12*4, 154*3}	{159, 16, 12*4, 147*3}
12	178	185	{165, 6*4, 177*3}	{172, 15, 12*4, 159*3}
11	193	199	{181, 8*4, 187*3}	{187, 14, 8*4, 181*3}
10	211	216	{200, 9*4, 202*3}	{205, 13, 4*4, 206*3}
9	232	238	{222, 240*3}	{228, 12, 9*4, 218*3}
8	260	265	{251, 4*4, 259*3}	{256, 11, 8*4, 247*3}
7	295	300	{287, 301*3}	{292, 10, 7*4, 284*3}
6	343	347	{336, 3*4, 342*3}	{340, 9, 6*4, 333*3}
5	410	413	{404, 4*4, 406*3}	{407, 8, 4*4, 403*3}
4	510	513	{505, 2*4, 509*3}	{508, 7, 4*4, 503*3}
3	677	680	{673, 679*3}	{676, 6, 3*4, 672*3}
2	1013	1015	{1010, 1*4, 1012*3}	{1012, 5, 2*4, 1009*3}
1	2020	2022	{2018, 2020*3}	{2020, 4, 1*4, 2018*3}

Таб. 3. Диапазоны возможных значений числа вершин v в зависимости от значения t при d = 2016.