ММ226. *Назовём натуральное число n счастливым, если оно является точной седьмой степенью, а седьмой (при упорядочении по возрастанию) натуральный делитель n равен количеству натуральных делителей n. А есть ли, вообще, счастье в жизни? В смысле, существуют ли счастливые числа?*

Далее будут использованы следующие обозначения: *p* и *q* — простые числа, $\tau(n)$ – количество натуральных делителей числа *n*, $\omega(n)$ — количество различных простых делителей числа *n*, $\Omega(n)$ — количество простых делителей числа *n*, пересчитанное с учётом кратности.

1. $\boldsymbol{n=p^7, \tau(n)=8.}$ Натуральные делители числа n — $\{1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7\}$. Но уравнение $p^6=8$ не имеет решений в натуральных числах, поэтому счастливых чисел такого вида не существует.

2. $\boldsymbol{n=p^{7k}, \tau(n)=7k+1.}$ Уравнение $p^6=7k+1$ имеет бесконечно много решений (малая теорема Ферма). Следовательно, существует бесконечно много счастливых чисел вида p^{p^6-1}, $p\neq 7$.

3. $\boldsymbol{n=p^7q^7, \tau(n)=64.}$ Но $64=2^6$ и при $p=2, q>2^6$ числа вида 2^7q^7 — счастливые.

4. $\boldsymbol{n=p_1^{7k_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{7k_m}}$**, 1≤m≤6,** $\boldsymbol{\tau(n)=p_1^6.}$ В этом случае $p_1^6<p_2<\ldots<p_m$, а показатели степеней в разложении $7k_m=p_1^{a_m}-1, 1\leq a_m\leq 6$. Тогда $\tau(n)=p_1^{(a_1+\ldots+a_m)}=p_1^6$. Количество вариантов выбора показателей a_i равно числу композиций числа 6. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} 7k_1=p_1^{a_1}-1 \\ \vdots \\ 7k_m=p_1^{a_m}-1 \end{cases}$$

можно свести к нахождению p_1 из уравнения $7k+1=p_1$, которое имеет бесконечное множество решений (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии).

Очевидно, что это является обобщением ранее рассмотренных видов чисел: п.2 — $m=1, a_1=6$; п.3 — $m=2, p_1=2, a_1=a_2=3$.

5. Далее покажем, что для счастливых чисел $\tau(n)$ может принимать другие значения.

Лемма 1. Пусть $n=\prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{a_i}$ – каноническое разложение числа *n*, $\tau(n)=\prod_{i=1}^{\omega(\tau(n))} q_i^{b_i}$, $\Omega(\tau(n))=\sum_{i=1}^{\omega(\tau(n))} b_i$. Тогда $\omega(n)\leq\Omega(\tau(n))$.

Доказательство. По определению $\tau(n)=\prod_{i=1}^{\omega(n)}(a_i+1)$. Пусть все множители — простые числа $a_i+1=q_i$, тогда $\tau(n)=\prod_{i=1}^{\omega(n)} q_i$, $\Omega(\tau(n))=\omega(n)$. Иначе, если среди множителей (a_i+1) есть составные числа, $\Omega(\tau(n))>\omega(n)$.

Лемма 2. Пусть $n=\prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{7a_i}$ — каноническое разложение счастливого числа *n*, $(p_1, p_2, \ldots, p_{\omega(n)})$ — возрастающая последовательность простых делителей. Тогда $\tau(n)$ может принимать значения из множества $\{p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6, p_1p_2, p_2^2\}$.

Доказательство. По определению счастливых чисел седьмой (при упорядочении по возрастанию) натуральный делитель *n* равен $\tau(n)$. Рассмотрим возможные варианты при различных соотношениях между простыми делителями числа *n*.

$\boldsymbol{p_1^6<p_2.}$ Первые семь делителей в порядке возрастания $D=(1, p_1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6)$. Видно, что для чисел такого вида достаточно одного простого делителя в разложении, а по Лемме 1 $\omega(n)\leq 6$, значит $1\leq\omega(n)\leq 6$. Этот случай был уже рассмотрен в п.4.

$\boldsymbol{p_1^5<p_2<p_1^6.}$ $D=(1, p_1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_2)$. Невозможно, т. к. $\omega(n)>1$, поэтому $\tau(n)$ не может быть простым числом.

$\boldsymbol{p_1^4<p_2<p_1^5.}$ $D=(1, p_1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_2, p_1^5)$. $2\leq\omega(n)\leq 5$.

$\boldsymbol{p_1^3<p_2<p_1^4.}$ Умножим на p_1: $p_1^4<p_1p_2<p_1^5$. $D=(1, p_1, p_2^2, p_1^3, p_2, p_1^4, p_1p_2)$. $\omega(n)=2$.

$\boldsymbol{p_1^2<p_2<p_1^3.}$ Умножим на p_1: $p_1^3<p_1p_2<p_1^4$. $D=(1, p_1, p_1^2, p_2, p_1^3, p_1p_2, p_1^4)$. $2\leq\omega(n)\leq 4$.

$\boldsymbol{p_1<p_2<p_1^2.}$ Умножим на p_1: $p_1^2<p_1p_2<p_1^3$, умножим на p_2: $p_1p_2<p_2^2<p_1^2p_2$, но также $p_1^3<p_1^2p_2$. Первые пять делителей — $(1, p_1, p_2, p_1^2, p_1p_2)$, дальше: (p_1^3, p_2^2), $\omega(n)=2$ или (p_2^2, p_1^3), $2\leq\omega(n)\leq 3$.

$\boldsymbol{p_1<p_2<p_3<p_1^2.}$ Умножим на p_1: $p_1^2<p_1p_2<p_1p_3<p_1^3$, умножим на p_2:

$p_1 p_2 < p_2^2 < p_2 p_3 < p_1^2 p_2$. Первые шесть делителей — $(1, p_1, p_2, p_3, p_1^2, p_1 p_2)$, далее $p_1 p_3$ или p_2^2 по возрастанию. Невозможно, т. к. $\omega(n)=3$, а степень седьмого делителя равна 2 (Лемма 1).

Очевидно, что описанное в п.4 подходит и счастливого числа *n*, для которого $\tau(n) \neq p_1^6$, естественно с учётом значения седьмого натурального делителя $(\tau(n))$ и допустимым для этого значения количеством простых делителей $(\omega(n))$.