

ММ227 (7 баллов)Решения принимаются до 20.10.2017

Пусть $n = \prod_{i=1}^s p_i^{a_i}$ - каноническое разложение n . Обозначим через $sopf(n)$ число $p_1 + p_2 + \dots + p_s$.

Назовем натуральное число k слабым, если уравнение $x = k \cdot sopf(x)$ неразрешимо в натуральных числах, и сильным в противном случае.

а) Доказать, что сильных чисел бесконечно много.

б) Найти наименьшее слабое число.

в) Доказать, что слабых чисел бесконечно много.

Ответ: (б) 46

Решение: (а) Любое простое число p является сильным, так как $x = p^2$ - решение уравнения $x = p \cdot sopf(x)$.

(б) Если число $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ - сильное число, а x - решение уравнения с этим k , то и любое число, имеющее тот же набор простых в разложении, то есть любое число вида $p_1^{\alpha_1 \pm \beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s \pm \beta_s}$ - тоже сильное число, а $x \cdot p_1^{\pm \beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\pm \beta_s}$ - решение соответствующего уравнения (это число натуральное, так как x делится на k).

Значит, минимальное слабое число должно быть произведением первых степеней простых множителей. Кроме того, простые числа - сильные, согласно пункту (а), и чтобы доказать, что нет слабых, меньших 46, достаточно привести решения уравнения $x = k \cdot sopf(x)$ для k , меньших 46, и являющихся произведением двух или трех различных простых:

При $k = 6 = 2 \cdot 3$: $x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot (2 + 3 + 5)$

При $k = 10 = 2 \cdot 5$: $x = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot (2 + 5 + 7)$

При $k = 14 = 2 \cdot 7$: $x = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot (2 + 3 + 7)$

При $k = 15 = 3 \cdot 5$: $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 5 \cdot (2 + 3 + 5)$

При $k = 21 = 3 \cdot 7$: $x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot (2 + 3 + 7)$

При $k = 22 = 2 \cdot 11$: $x = 2^2 \cdot 11 \cdot 13 = 2 \cdot 11 \cdot (2 + 11 + 13)$

При $k = 26 = 2 \cdot 13$: $x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 2 \cdot 13 \cdot (2 + 3 + 13)$

При $k = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$: $x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2 + 3 + 5)$

При $k = 33 = 3 \cdot 11$: $x = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 = 3 \cdot 11 \cdot (2 + 3 + 11)$

При $k = 34 = 2 \cdot 17$: $x = 2^2 \cdot 17 \cdot 19 = 2 \cdot 17 \cdot (2 + 17 + 19)$

При $k = 35 = 5 \cdot 7$: $x = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 5 \cdot 7 \cdot (2 + 5 + 7)$

При $k = 38 = 2 \cdot 19$: $x = 2^4 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 19 \cdot (2 + 3 + 19)$

При $k = 39 = 3 \cdot 13$: $x = 2 \cdot 3^3 \cdot 13 = 3 \cdot 13 \cdot (2 + 3 + 13)$

При $k = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$: $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (2 + 3 + 7)$

Покажем, что при $k = 46 = 2 \cdot 23$ уравнение решений не имеет. Предположим, что существует решение уравнения $x = 2 \cdot 23 \cdot \text{sopf}(x)$. Поскольку $2+23 = 25$, что не делится ни на 2, ни на 23, x должен иметь еще какие-то простые делители.

Если есть только один делитель p , то $x = 2^\alpha \cdot 23^\beta \cdot p^\gamma = 2 \cdot 23 \cdot (2 + 23 + p)$, откуда следует, что $25 + p$ делит p . Но это возможно только при $p = 5$, но тогда x делится еще и на 3, противоречие.

Пусть у x есть два делителя p и q . Тогда $x = 2^\alpha \cdot 23^\beta \cdot p^\gamma \cdot q^\delta = 2 \cdot 23 \cdot (2 + 23 + p + q)$, откуда следует, что $25 + p + q$ делит $p \cdot q$, а значит $25 + p + q \geq p \cdot q$, откуда следует, что $(p - 1)(q - 1) \leq 26$, что выполняется только для пар нечетных простых 3 и 5, 3 и 7, 3 и 11, 3 и 13, 5 и 7. Прямая проверка показывает, что во всех этих случаях $\text{sopf}(x)$, а значит и x , имеют еще и другие простые множители. Противоречие.

Если же x имеет три (или более) простых делителей, то, аналогично, должно выполняться неравенство $25 + p + q + r \dots \geq p \cdot q \cdot r \dots$, что не выполняется даже для самых маленьких наборов простых.

(в) По утверждению в начале пункта (б) и в силу слабости числа 46, любое число $2^\alpha \cdot 23^\beta$ тоже слабое.

Эстетическая оценка: 5 баллов.