О. Б. Полубасов   21.07.2017 г.

===========ММ227===============

ММ227 (7 баллов)

Решения принимаются до 20.10.2017

Пусть $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}$ - каноническое разложение n.

Обозначим через $sopf(n)$ число $p_1 + p_2 + ...p_s$.

Назовем натуральное число k слабым, если уравнение $x = k \cdot sopf(x)$ неразрешимо в натуральных числах, и сильным в противном случае.

Доказать, что сильных чисел бесконечно много.

Найти наименьшее слабое число.

Доказать, что слабых чисел бесконечно много.

=========================

Из определения sopf(x) вытекает сразу несколько следствий.

1. sopf(1) = 0.
2. Если x > 1, то sopf(x) > 0.
3. Если x – простое, то sopf(x) = x.
4. 1 – сильное число.

Утверждение 1.

Если x – не простое, то sopf(x) ≤ x/2 + 2.

Доказательство по индукции по числу сомножителей x.

Утверждение 2.

sopf(x) = x ⇔ x – простое.

Доказательство от противного.

Обозначим через popf(n) произведение всех простых делителей n без учёта кратности, то есть, если $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}$, то $popf(n) = \prod_{i=1}^{s} p_i$.

Очевидно, что sopf(n) = sopf(popf(n)).

Утверждение 3.

popf(k) – сильное ⇔ k – сильное.

Доказательство.

Пусть popf(k) – сильное. Значит, существует x: x = popf(k)*sopf(x).

Следовательно, x кратно popf(k).

Тогда k*x/popf(k) = k*sopf(x) = k*sopf(k*x/popf(k)), то есть, k – сильное.

Наоборот, пусть k – сильное. Значит, существует x: x = k*sopf(x).

Следовательно, x кратно k.

Тогда popf(k)*x/k = popf(k)*sopf(x) = popf(k)*sopf(popf(k)*x/k), то есть, popf(k) – сильное.

Таким образом, каждое сильное число, свободные от квадратов, кроме 1, порождает бесконечное семейство сильных чисел с тем же набором простых делителей.

Точно так же, каждое слабое число, свободные от квадратов, порождает бесконечное семейство слабых чисел с тем же набором простых делителей.

Утверждение 4.

Все простые числа – сильное.

Доказательство.

Пусть k – простое. Положим $x = k^2$.

Тогда sopf(x) = k, x = k*sopf(x).

Пусть некоторое число k > 1 свободно от квадратов.

Рассмотрим число y со следующими свойствами.

1. y свободно от квадратов.
2. НОД(k, y) = 1.
3. z = sopf(ky) кратно y.
4. ky кратно popf(z).

Пример 1.

Пусть k = 2 * 17. Тогда подойдёт y = 19 или y = 33.

k	sopf(k)	y	z = sopf(ky)	popf(z)	ky	x = kz
34 = 2 * 17	19	19	2 + 17 + 19 = 38	2 * 19	2 * 17 * 19	2^2 * 17 * 19 = 1292
34 = 2 * 17	19	3*11	2 + 3 + 11 + 17 = 33	3 * 11	2 * 3 * 11 * 17	2 * 3 * 11 * 17 = 1122

Утверждение 5.

Если существует y с требуемыми свойствами, то число k – сильное.

Доказательство.

Так как popf(kz) кратно ky и ky кратно popf(kz), то popf(kz) = ky.

Положим x = kz.

Тогда sopf(x) = sopf(kz) = sopf(popf(kz)) = sopf(ky) = z = x/k.

Заметим, что минимально возможное y не обязательно даёт минимально возможное x.

Утверждение 6.

Если y с требуемыми свойствами не существует, то число k – слабое.

Доказательство.

Предположим, что k – сильное. Значит, существует x: x = k*sopf(x).

Так как k свободно от квадратов, то popf(x) кратно k.

Положим y = popf(x)/k. Тогда.

1. Так как popf(x) свободно от квадратов, то и y свободно от квадратов.
2. НОД(k, y) = 1.
3. z = sopf(ky) = sopf(popf(x)) = sopf(x) = x/k кратно popf(x)/k = y.
4. ky = popf(x) кратно popf(x/k) = popf(z).

Следовательно, все требуемые свойства y выполняются. Противоречие.

Утверждение 7.
Если существует y с требуемыми свойствами, то $y \le 2sopf(k) + 4$.
Доказательство.
Если y = 1, то утверждение верно.

Пусть y – простое.
По свойству 3, z = sopf(ky) = sopf(k) + y кратно y.
Следовательно, sopf(k) кратно y, а значит, $y \le sopf(k) < 2sopf(k) + 4$.

Теперь предположим, что y > 2sopf(k) + 4, то есть, sopf(k) < y/2 – 2, где y – составное.

Тогда z = sopf(ky) = sopf(k) + sopf(y) < y/2 – 2 + y/2 + 2 = y. Но тогда z не может быть кратно y, а значит, свойство 3 не выполняется. Противоречие.

Таким образом, чтобы найти наименьшее слабое число, достаточно проверить только составные числа, свободные от квадратов, причём для каждого проверяемого числа k достаточно проверить только $y \le 2sopf(k) + 4$.

k	sopf(k)	y	z = sopf(ky)	popf(z)	x = kz
6 = 2 * 3	5	5	2 + 3 + 5 = 10	2 * 5	60
10 = 2 * 5	7	7	2 + 5 + 7 = 14	2 * 7	140
14 = 2 * 7	9	3	2 + 3 + 7 = 12	2 * 3	168
15 = 3 * 5	8	2	2 + 3 + 5 = 10	2 * 5	150
21 = 3 * 7	10	2	2 + 3 + 7 = 12	2 * 3	252
22 = 2 * 11	13	13	2 + 11 + 13 = 26	2 * 13	572
26 = 2 * 13	15	3	2 + 3 + 13 = 18	2 * 3	468
30 = 2 * 3 * 5	10	1	2 + 3 + 5 = 10	2 * 5	300
33 = 3 * 11	14	2	2 + 3 + 11 = 16	2	528
34 = 2 * 17	19	19	2 + 17 + 19 = 38	2 * 19	1292
35 = 5 * 7	12	2	2 + 5 + 7 = 14	2 *7	490
38 = 2 * 19	21	3	2 + 3 + 19 = 24	2 * 3	912
39 = 3 * 13	15	2	2 + 3 + 13 = 18	2 * 3	702
42 = 2 * 3 * 7	12	1	2 + 3 + 7 = 12	2 * 3	504
46 = 2 * 23	25	?			

Ответ. Наименьшее слабое число: 46. Слабые числа, свободные от квадратов:
46, 55, 85, 87, 110, 123, 138, 141, 145, 155, 158, 183, 187, 190, 194, 203, 205, 217, 219, …

В первом миллионе – 684936 сильных чисел и 315064 слабых, то есть, 68.5 / 31.5%, во втором – 675575 сильных чисел и 324425 слабых, то есть, 67.6 / 32.4%.