О. Б. Полубасов   27.10.2017 г.

===========ММ228===============

ММ228 (4 балла)

Решения принимаются до 27.10.2017

Какое наименьшее число элементарных четырехугольников может быть в конфигурации из семи прямых общего положения?

===========================

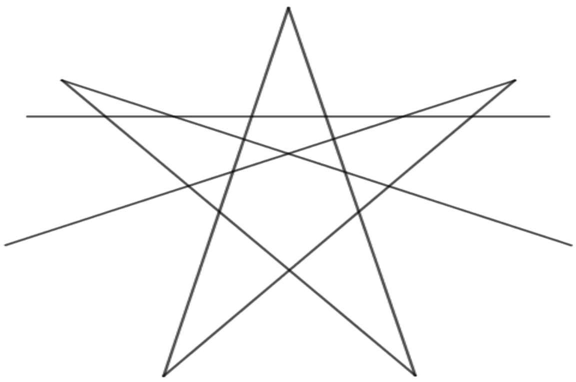

Рис. 1. 7-конфигурация, имеющая вектор граней (11, 0, 3, 1, 0).

Ответ. В 7-конфигурации может вовсе не быть элементарных четырёхугольников.

Не так-то просто обобщить задачу ММ228, не решив попутно ММ229.

Легко убедиться, что существует только одна 3-конфигурация: (1), и только одна 4-конфигурация: (2, 1).

Для 5 и 6 прямых нетрудно построить конфигурации, не содержащие элементарных четырёхугольников. Конфигурации, имеющие векторы граней (5, 0, 1) и (7, 0, 3, 0) соответственно, представлены на рис. 2.

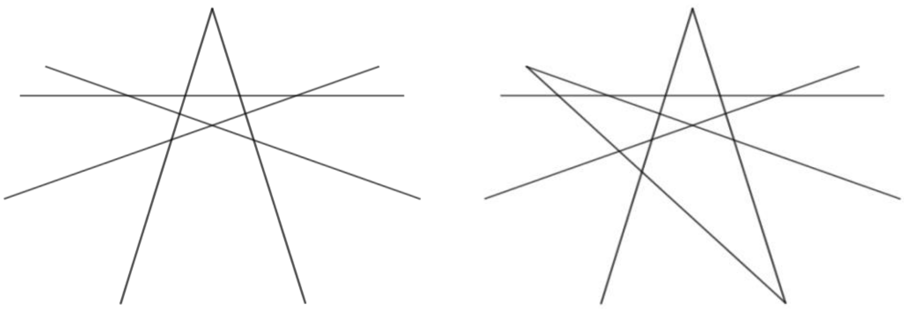

Рис. 2. 5-конфигурация с вектором граней (5, 0, 1) и 6-конфигурация с вектором граней (7, 0, 3, 0).

Интересно рассмотреть и задачу противоположного толка: «Какое НАИБОЛЬШЕЕ число элементарных четырехугольников может быть в конфигурации из n прямых общего положения?».

Решение.

Пусть число прямых равно n.

Тогда число точек пересечения $v = C(n, 2)$.

На каждой прямой по (n-2) элементарных отрезка, поэтому всего элементарных отрезков $e = n(n-2)$.

Пусть g – число элементарных многоугольников. По формуле Эйлера, $g = e + 1 – v = C(n-1, 2)$.

Среди элементарных многоугольников найдётся не менее чем n-2 треугольника (довольно неожиданно, что доказательство этого простого факта было получено лишь в 1979 г. Грюнбаумом и Шеппардом), поэтому на долю четырёхугольников остаётся не более чем $g4 = C(n-1, 2) – (n-2) = C(n-2, 2)$ элементарных многоугольника. Построить соответствующую конфигурацию несложно: пусть прямая $i = 1..n$ проходит через точки $(0, i)$ и $(n+1-i, 0)$, тогда каждая новая прямая, начиная с третьей, добавляет к конфигурации один треугольник и n-3 четырёхугольника (рис. 3).

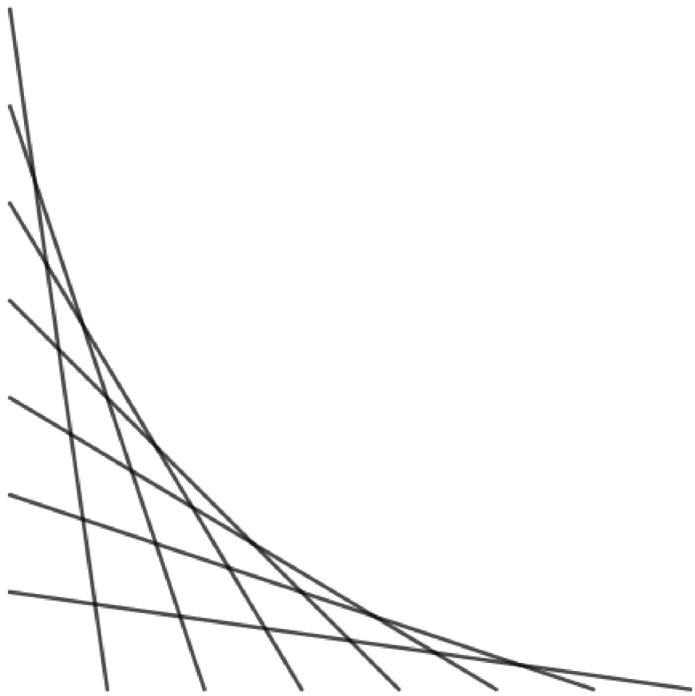

Рис. 3. n-конфигурация, имеющая вектор граней (n-2, C(n-2, 2), 0, .., 0).