Шамсутдинов Константин

# MM250

Ответ: 13 ребер, многогранник следующий:

Рис. 1

Варьируя расстояние , мы можем добиться равенства, заданного в условии.

Решение.

Пусть:

E – количество ребер многогранника,

V – вершин,

S – граней,

Si – граней из i вершин (например, S3 - треугольных),

D – диагоналей многогранника.

1. Так как многогранник выпуклый, то три его вершины не могут лежать на одной прямой. В том числе, вершина одной грани не может лежать между вершинами стороны другой грани. Из этого факта и того, что все грани можно спроецировать внутрь одной без пересечений ребер выводится формула Эйлера: E=V+S-2. Если взять какую-то диагональ AB и несколько ребер AC1 C1C2… CkB, соединяющих ломанной вершины A и B, то сумма длин этих ребер будет больше, чем |AB| (Рис. 2).

A

C1

B

C2

Рис. 2

Если в многограннике каждой диагонали мы поставим в соответствие свою ломанную из ребер, соединяющую ее вершины, причем никакое ребро не будет участвовать в 2 ломанных, относящихся к разным диагоналям, то такой многогранник не может удовлетворять условию задачи. Например, многогранник, изоморфный кубу:

Рис. 3

2. Докажем, что при соблюдении условия задачи D≥4. Рассмотрим любую диагональ AB многогранника (Рис. 4). Возьмем на ней любую точку C и проведем через нее перпендикулярную AB плоскость. Эта плоскость пересечет как минимум 3 ребра многогранника. Поэтому суммарная длина всех ребер, лежащих в слое между двумя плоскостями, проходящими через A и B соответственно, и перпендикулярных AB, будет больше, чем 3|AB|. Исключен случай равенства 3|AB|, так как вершины многогранника не лежат на одной прямой и вершины связаны по ребрам.

A

B

C

•

•

•

•

•

•

Рис. 4

Поэтому длина каждой диагонали < 1/3 суммы длин всех ребер. Из условия задачи следует, что диагоналей >3.

3. Исходные соотношения, верные для любых выпуклых многогранников:

 (1)

Рассмотрим все многогранники с количеством ребер ≤13. Граней ≥7 вершинами у них не может быть (если есть грань с вершинами, то ). Из (1) получаем:

 (2)

Учитываем также:

Если максимальное количество вершин грани - , то .

 (3)

Получаем следующие варианты для , , , :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |  |  | Примечание |
| 1 | 4 | 2 | 0 | 1 | 13 | 8 | 7 | 2 |  |
| 2 | 6 | 0 | 0 | 1 | 12 | 7 | 7 | 0 |  |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 0 | 11 | 8 | 5 | 0 | не реализуется |
| 4 | 3 | 0 | 3 | 0 | 12 | 8 | 6 | 1 | не реализуется |
| 5 | 0 | 4 | 2 | 0 | 13 | 9 | 6 | 5 | не реализуется |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 0 | 12 | 8 | 6 | 2 |  |
| 7 | 4 | 0 | 2 | 0 | 11 | 7 | 6 | 0 | не реализуется |
| 8 | 4 | 1 | 2 | 0 | 13 | 8 | 7 | 3 |  |
| 9 | 1 | 4 | 1 | 0 | 12 | 8 | 6 | 3 | не реализуется |
| 10 | 3 | 2 | 1 | 0 | 11 | 7 | 6 | 1 |  |
| 11 | 3 | 3 | 1 | 0 | 13 | 8 | 7 | 4 | подходит - ответ |
| 12 | 5 | 0 | 1 | 0 | 10 | 6 | 6 | 0 |  |
| 13 | 5 | 1 | 1 | 0 | 12 | 7 | 7 | 2 |  |
| 14 | 7 | 0 | 1 | 0 | 13 | 7 | 8 | 3 |  |
| 15 | 0 | 6 | 0 | 0 | 12 | 8 | 6 | 4 | изоморфен кубу |
| 16 | 2 | 3 | 0 | 0 | 9 | 6 | 5 | 0 |  |
| 17 | 2 | 4 | 0 | 0 | 11 | 7 | 6 | 2 |  |
| 18 | 2 | 5 | 0 | 0 | 13 | 8 | 7 | 5 | решений нет |
| 19 | 4 | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 4 | 0 |  |
| 20 | 4 | 1 | 0 | 0 | 8 | 5 | 5 | 0 |  |
| 21 | 4 | 2 | 0 | 0 | 10 | 6 | 6 | 1 |  |
| 22 | 4 | 3 | 0 | 0 | 12 | 7 | 7 | 3 |  |
| 23 | 6 | 0 | 0 | 0 | 9 | 5 | 6 | 1 |  |
| 24 | 6 | 1 | 0 | 0 | 11 | 6 | 7 | 2 |  |
| 25 | 6 | 2 | 0 | 0 | 13 | 7 | 8 | 4 | решений нет |
| 26 | 8 | 0 | 0 | 0 | 12 | 6 | 8 | 3 |  |

Случаи, для которых написано «не реализуется», удовлетворяют (2) и (3), но, тем не менее, многограгранников с такой схемой граней не существует.

4. Остаются 4 случая, помеченные зеленым. Случай 15, изоморфный кубу, не подходит, пояснение на Рис. 4, поэтому нет решений с . Покажем, что решение, показанное на Рис. 1 единственно для с точностью до изоморфизма.

Для случая №11 (3,3,1) возможны 5 вариантов многогранников, из которых 1 подходит под условие, а 4 – нет, для них показаны соответствующие диагоналям ломанные из ребер, как описано в пункте 1.

ответ

Рис. 5

Аналогично для случая №25 (6, 2) возможно 2 варианта, не подходящих под условие:

Рис. 6

Для случая №18 (2, 5) возможно 2 варианта, отсутствие решения в первом из которых доказывается чуть сложнее:

a

b

c

d

e

A

B

Рис. 6

В первом варианте, который показан слева, диагональ , . Поэтому

. Значит не может одновременно выполняться и . Если , то мы используем соответствие других, кроме , диагоналей ребрам, показанное на рисунке, если , то используем симметричное относительно диагонали AB соответствие.

5. Поясним, почему многогранник, показанный на Рис. 1 может удовлетворять условию. Если его растянуть по горизонтали, отодвинув далеко вправо вершины, находящиеся в правой красной рамке, то сумма его диагоналей будет равна , а сумма ребер - , при каком-то большом сумма диагоналей будет больше суммы ребер. Рассмотрим другой крайний случай:

Рис. 7

Будем растягивать по вертикали, делая большим, и не меняя взаимного положения вершин внутри каждой красной рамки. Тогда сумма диагоналей будет равна , а сумма ребер – . При достаточно большом сумма диагоналей будет меньше суммы ребер. Непрерывной деформацией можно перевести рисунок 1 в рисунок 7, в каком-то промежуточном положении сумма диагоналей будет равна сумме ребер.

Оценка задачи: 5.