MM252

11 сентября 2020 г.

Лемма. Если четыре числа таковы, что $ab = cd$, то $a + b = c + d$ тогда и только тогда, когда пары (a, b) и (c, d) совпадают с точностью до перестановки.

Доказательство. Пусть a, b - даны. Обозначим $P = ab$, $S = a + b$. Тогда $d = S - c$, и $P = c(S - c)$ - квадратное уравнение для c. Но у него есть два решения, и оба видны из построения: $c = a$ или $c = b$. ЧТД

Пусть число N удовлетворяет условию задачи: есть 4 тройки чисел, произведения которых равны N, а суммы встречаются дважды. Если мы домножим все числа на некоторое натуральное n, то равенства сумм сохранятся, а произведение станет равным Nn^3. Следовательно, если число qp^k удовлетворяет условию задачи, то qp^{k+3} тоже удовлетворяет, и количество решений бесконечно.

Найдем такие N. Запишем в ясном виде равенство сумм:
$qp^a + p^b + p^c = qp^{a'} + p^{b'} + p^{c'}, k = a + b + c = a' + b' + c'$

В первую очередь, заметим, что $a \neq a'$, $b \neq b' \neq c \neq c' \neq b$ (при этом допустимо $b = c, b' = c'$). Если это не так, то из Леммы следует, что мы рассматриваем одну и ту же тройку (a, b, c). Мы можем разделить равенство на наименьшую степень p, и, перенося соответственные слагаемые в одну или другую часть равенства, видим, что по крайней мере два члена будут с этой степенью. С учетом предыдущего замечания, есть три варианта (возможно, пересекающихся). Выпишем их все аналогично предыдущему равенству с приравненными нулю отдельными переменными:
$qp^a + p^b + p^c = q + p^{b'} + 1, a + b + c = b', a > 0$
$qp^a + p^b + 1 = q + p^{b'} + p^{c'}, a + b = b' + c', a > 0$
$qp^a + p^b + p^c = qp^{a'} + 1 + 1, a + b + c = a'$

В последнем случае, фактически, записано, что для трех натуральных чисел, больших единицы ($b > 0, c > 0, q$ - простое), верно $x + y + z > xyz$. Если обозначить $m = max(x, y, z)$, то левая часть не больше $3m$, с другой стороны, произведение любых двух не меньше 4, поэтому xyz не меньше $4m$. Тогда $3m > 4m$, или $m < 0$, что противоречит постановке.

Таким образом, выполняется одно из равенств:
$qp^a + p^b + p^c = q + p^{b'} + 1, a + b + c = b', a > 0$ (*)
$qp^a + p^b + 1 = q + p^{b'} + p^{c'}, a + b = b' + c', a > 0, b > 0, b' > 0, c' > 0$ (**)

Как видно, в первом случае $p|q+1$, во втором $p|q-1$ Если одна пара троек удовлетворяет первому, а другая - второму равенству, то верно также, что $p|2$, что возможно только при $p = 2$. Большие p, следовательно, могут определять решение задачи только если для обеих сумм выполнено только одно из равенств.

Выразим, соответственно, q через p:
$q = \frac{p^{b'} - p^b - p^c + 1}{p^a - 1}$
$q = \frac{p^{b'} + p^{c'} - p^b - 1}{p^a - 1}$
Обозначая через (d, e, f) переменные для еще одной пары троек, запишем теперь соотношения:
$q = \frac{p^{b'} - p^b - p^c + 1}{p^a - 1} = \frac{p^{e'} - p^e - p^f + 1}{p^d - 1}$
$b' = a + b + c, e' = d + e + f$
$q = \frac{p^{b'} + p^{c'} - p^b - 1}{p^a - 1} = \frac{p^{e'} + p^{f'} - p^e - 1}{p^d - 1}$
$a + b = b' + c', d + e = e' + f'$
Избавляясь от дробей и перенося слагаемые в ту или иную часть равенств, мы получим выражения, состоящие из только степеней p:
$p^{a+b+c+d} + p^d + p^b + p^c + p^{e+a} + p^{f+a} + p^{d+e+f} =$
$= p^{d+e+f+a} + p^a + p^e + p^f + p^{b+d} + p^{c+d} + p^{a+b+c}$

$p^{b'+d} + p^{c'+d} + p^b + p^{e+a} + p^a + p^{e'} + p^{f'} =$
$= p^{e'+a} + p^{f'+a} + p^e + p^{b+d} + p^d + p^{b'} + p^{c'}$
$a + b = b' + c', d + e = e' + f'$

Как видно, степени p слева и справа должны соответствовать друг другу. Если почленно отсеивать меньшие степени, можно прийти с условиям взаимного соответствия, и мы получим уравнения для переменных $a, b, ...$, при этом количество уравнений избыточно, но одно решение точно есть: $d = a, e = b, f = c$ и т.д. Таким образом, если некоторое число N удовлетворяет условиям задачи, то одна сумма должна сводиться к (*), а другая - к (**). Но не одновременно к одному из выражений. Следовательно, $p > 2$ не может выполняться.

Итак, $p=2$, подберем какое-нибудь решение. Запишем:

$q2^a+2^b+2^c=q+2^{a+b+c}+1$

$q2^d+2^e+1=q+2^f+2^g, d+e=f+g$

Из первого:

$q(2^a-1)=(2^a-1)2^{b+c}+(2^b-1)(2^c-1)$

Пусть $c=a$, тогда $q=2^{a+b}+2^b-1$

$(2^{a+b}+2^b-1)(2^d-1)+1=2^f+2^g-2^e, d+e=f+g$

$2^{a+b+d}+2^{b+d}-2^d-2^{a+b}-2^b+2=2^f+2^g-2^e, d+e=f+g$

Как видно, какая-то из переменных должна быть равна единице. Пусть $g=1$.

$2^{a+b+d}+2^{b+d}+2^e=2^d+2^{a+b}+2^b+2^f, d+e=f+1$

Так как количество степеней слева и справа разное, то какие-то степени совпадают. Допустим, $d=b$

$2^{a+2b}+2^{2b}+2^e=2^{b+1}+2^{a+b}+2^f, b+e=f+1$

Не может быть, что $b=1$, так как тогда

$2^{a+2}+4+2^e=4+2^{a+1}+2^f, e=f$ или $2=1$

Так что $b>1, e<f$.

Наибольшая степень слева: 2^{a+2b} или 2^e, а справа 2^f В случае $f=a+2b$ получим

$2^{2b}+2^{a+b+1}=2^{b+1}+2^{a+b}$

$2^b+2^a=2$ - что верно только при $a=b=0$

Значит, $a+2b=e=f-1$, тогда $b=2$

$2^4=2^3+2^{a+2}$, следовательно, $a=1, e=5, f=6$

$q=2^{a+b}+2^b-1=8+4-1=11$

Подставим явно:

$11*2^1+2^2+2^1=22+4+2=28; 22*4*2=176$

$11+2^4+1=11+16+1=28; 11*16*1=176$

$11*2^2+2^5+1=44+32+1=77; 44*32*1=1408$

$11+2^7+2=11+64+2=77; 11*64*2=1408$

Легко видеть, что $1408/176=8$, поэтому первые две суммы можно умножить на 2 и получить: $11*2^2+2^3+2^2=44+8+4=56; 44*8*4=1408$

$11*2:1+2^5+2^2=22+32+2=56; 22*32*2=1408$

Итак, число $1408=11*2^7$ удовлетворяет условиям задачи, а, следовательно, и все числа вида $1408*8^k=11*2^{7+3k}, k=0,1,...$

Таким образом, количество решений бесконечно, ЧТД.