Олег Полубасов 04.09.2020 г.

===========MM252================

MM252 (4 балла)

Решения принимаются до 12.09.2020.

Для числа 90 существуют две пары представлений в виде произведения трех сомножителей таких, что суммы сомножителей внутри каждой пары одинаковы:

$90 = 1 \cdot 9 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 15, 1 + 9 + 10 = 2 + 3 + 15;$

$90 = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 10, 2 + 5 + 9 = 3 + 3 + 10.$

Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел вида $p^k q$ (p, q - простые, k - натуральное), обладающих таким свойством.

Одно число нетрудно подобрать: $22 = 11*2^1$.

$22 = 0.25 * 8 * 11 = 0.5 * 16 * 2.75$, $0.25 + 8 + 11 = 0.5 + 16 + 2.75 = 19.25$.

$22 = 0.5 * 8 * 5.5 = 1 * 2 * 11$, $0.5 + 8 + 5.5 = 1 + 2 + 11 = 14$.

Умножив каждый сомножитель на $\sqrt[3]{p} = \sqrt[3]{2}$, получим две пары представлений числа в p=2 раза большего. Поскольку это можно повторять бесконечно, то таких чисел бесконечно много.

Ответ. Доказано конструктивно.

Другие решения

Рассмотрим, как устроена пара представлений.

$x = qp^k$, где q, p – простые, k – натуральное, $k = a + b + c = d + e + f$, a, b, c, d, e, f – целые, причём должно выполняться: $p^a + p^b + qp^c = p^d + p^e + qp^f$.

Если $k > 1$, то вычтя $(k-1)/3$ из всех показателей степеней, получим $k = 1$. Эта пара представлений – минимальная в цепочке пар представлений, а $x = qp^1$ – основание геометрической прогрессии со знаменателем p.

Удобнее работать с неотрицательными степенями, так как тогда все сомножители будут натуральными, поэтому рассмотрим пару, в которой $a = 0$, $b > 0$, $d > 0$, $e \geq d$. Назовём эту пару представлений натуральной.

Так как $q(p^f – p^c) = 1 + p^b – p^d – p^e$, то правая часть равенства целая и по модулю p равна 1, а значит, и левая. Поэтому $\min(c, f) = 0$, $c \neq f$.

Возможны два варианта: $c = 0$ или $f = 0$.

1. Семейство пар представлений, если c = 0, f > 0

Если a = c = 0, то b = d + e + f.
$1 + p^{d+e+f} + q = p^d + p^e + qp^f$,
$q(p^f – 1) = p^{d+e+f} – p^d – p^e + 1$.
$q = (p^{d+e+f} – p^d – p^e + 1)/(p^f – 1)$.

Если q целое и простое, то найдено решение.
Получили параметрическое семейство решений (p, d, e, f).
Так как $q = p^d + p^e + qp^f – p^{d+e+f} – 1$, то (q mod p) = p-1.

2. Семейство пар представлений, если f = 0, c > 0

Если a = f = 0, то b = d + e – c.
$1 + p^{d+e-c} + qp^c = p^d + p^e + q$,
$q(p^c – 1) = p^d + p^e – p^{d+e-c} – 1$,
$q = (p^d + p^e – p^{d+e-c} – 1)/(p^c – 1)$.

Если q целое и простое, то найдено решение.
Получили ещё одно параметрическое семейство решений (p, c, d, e).
Так как $q = p^{d+e-c} + qp^c – p^d – p^e + 1$, то (q mod p) = 1.

3. Геометрические прогрессии чисел, имеющих по две пары представлений. Знаменатели всех прогрессий равны 2

Основание	Натуральные пары представлений	
$5*2^1$	$5*2^3 = 40$ $5*2^8 = 1280$	$2^0 + 2^3 + 5*2^0 = 2^1 + 2^1 + 5*2^1 = 14$ $2^0 + 2^5 + 5*2^3 = 2^2 + 2^6 + 5*2^0 = 73$
$11*2^1$	$11*2^4 = 176$ $11*2^7 = 1408$	$2^0 + 2^4 + 11*2^0 = 2^1 + 2^2 + 11*2^1 = 28$ $2^0 + 2^5 + 11*2^2 = 2^1 + 2^6 + 11*2^0 = 77$
$17*2^1$	$17*2^7 = 2176$ $17*2^{14} = 278528$	$2^0 + 2^7 + 17*2^0 = 2^1 + 2^3 + 17*2^3 = 146$ $2^0 + 2^9 + 17*2^5 = 2^4 + 2^{10} + 17*2^0 = 1057$
$37*2^1$	$37*2^7 = 4736$ $37*2^{11} = 75776$	$2^0 + 2^7 + 37*2^0 = 2^1 + 2^4 + 37*2^2 = 166$ $2^0 + 2^8 + 37*2^3 = 2^2 + 2^9 + 37*2^0 = 553$
$113*2^1$	$113*2^7 = 14464$ $113*2^{18} = 29622272$	$2^0 + 2^7 + 113*2^0 = 2^3 + 2^3 + 113*2^1 = 242$ $2^0 + 2^{11} + 113*2^7 = 2^4 + 2^{14} + 113*2^0 = 16513$
$137*2^1$	$137*2^{10} = 140288$ $137*2^{15} = 4489216$	$2^0 + 2^{10} + 137*2^0 = 2^1 + 2^6 + 137*2^3 = 1162$ $2^0 + 2^{11} + 137*2^4 = 2^3 + 2^{12} + 137*2^0 = 4241$
$257*2^1$	$257*2^{15} = 8421376$ $257*2^{26} = 17246978048$	$2^0 + 2^{15} + 257*2^0 = 2^1 + 2^7 + 257*2^7 = 33026$ $2^0 + 2^{17} + 257*2^9 = 2^8 + 2^{18} + 257*2^0 = 262657$
$2081*2^1$	$2081*2^{16} = 136380416$ $2081*2^{23} = 17456693248$	$2^0 + 2^{16} + 2081*2^0 = 2^1 + 2^{10} + 2081*2^5 = 67619$ $2^0 + 2^{17} + 2081*2^6 = 2^5 + 2^{18} + 2081*2^0 = 264257$

Последовательность
10, 20, 22, 34, 40, 44, 68, 74, 80, 88, 136, 148, 160, 176, 226, 272, 274, 296, 320, 352, 452, 514, 544, 548, 592, 640, 704, 904, 1028, 1088, 1096, 1184, 1280, 1408, 1808, 2056, 2176, 2192, 2368, 2560, 2816, 3616, 4162… в OEIS отсутствует.