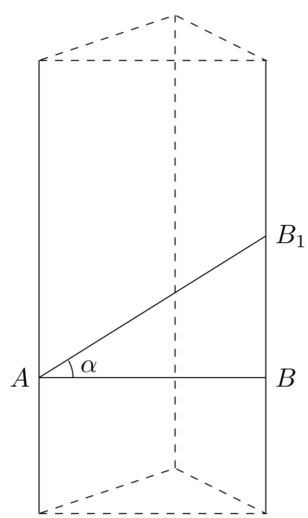
MM253

Дзюбенко В.А.

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2. Сечение призмы, проходящее через середину отрезка AB_1 перпендикулярно ему имеет площадь $\frac{28\sqrt{39}}{81}$. Найти объем призмы?

Для нахождения объёма правильной призмы достаточно знать площадь основания и длину высоты. Площадь легко вычисляется с помощью стороны, она равна $\sqrt{3}$. Найдём связь высоты призмы и площади указанного сечения.

Для этого сначала рассмотрим упрощённую задачу: пусть призма бесконечна в обе стороны. На одной из её граней отметим отрезок AB, перпендикулярный «рёбрам» призмы. Его длина равна 2. На этой же грани отложим отрезок AB_1 под углом α (см. рисунок). Ограничения на угол: $0 < \alpha < 90°$.

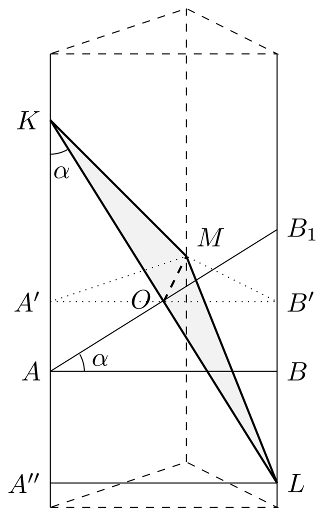


Построим сечение плоскостью из условия задачи и выразим зависимость площади этого сечения от α. Обозначим центр отрезка AB_1 за O. Плоскость, перпендикулярную AB_1 и проходящую через O, назовём γ (на следующем рисунке γ подкрашена серым).

Какие прямые (либо отрезки) лежат в γ?

Во-первых, это будет отрезок KL, перпендикулярный AB_1, лежащий в той же грани и проходящий через центр O.

Во-вторых, через точку O можно построить сечение плоскостью, параллельной AB, и треугольник $\triangle A'B'M$ в сечении получится равносторонним. MO – его высота, она будет перпендикулярна грани (поскольку перпендикулярна $A'B'$ и «ребру» AK). Следовательно MO перпендикулярна AB_1 и поэтому тоже лежит в γ. Таким образом, мы построили искомое сечение призмы $\triangle KLM$.



Площадь сечения найдём как $\frac{1}{2}KL \cdot MO$. Из равностороннего треугольника $\triangle A'B'M$ со стороной 2 находим, что $MO = \sqrt{3}$. Через точку L проведём отрезок $A''L$, параллельный AB и лежащий в исходной грани. Тогда из прямоугольного треугольника $\triangle KLA''$ получаем, что $KL = \dfrac{2}{\sin\alpha}$.

Итак, зависимость площади сечения от угла α для бесконечной призмы получается следующей:

$$S_\infty(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}.$$

Также найдём длину AK и $A'K$, они далее понадобятся. $KO = \dfrac{1}{2}KL = \dfrac{1}{\sin\alpha}$. Из треугольника $\triangle OKA$

$$AK = \frac{KO}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

И из треугольника $\triangle OKA'$

$$A'K = KO \cdot \cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

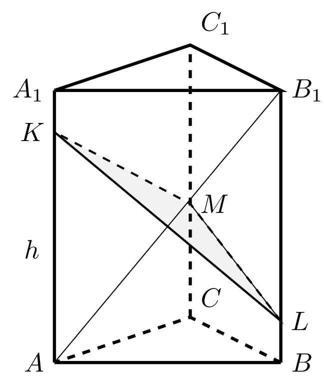
Видно, что с увеличением угла α длина AK уменьшается, и площадь сечения тоже уменьшается.

Теперь рассмотрим обычную призму $ABCA_1B_1C_1$ с высотой h. Достроим её до бесконечной и построим сечение $\triangle KLM$. Обратим внимание, что в задаче есть симметрия: можно перевернуть призму таким образом, что отрезок AB_1 перейдёт в B_1A, верхнее основание призмы поменяется местами с нижним, а сечение $\triangle KLM$ перейдёт в $\triangle LKM$, то есть картина не изменится.

При этом, треугольник $\triangle KLM$ может пересекаться либо не пересекаться с основаниями призмы (наличие одной общей точки пересечением не считаем). Из симметрии следует, что $\triangle KLM$ пересекается либо с обоими основаниями, либо ни с одним из них. А если пересекается, то основания отсекают от него равные треугольники (см. рисунки ниже).

Условие того, что основания и $\triangle KLM$ не пересекаются, следующее: $AK \leq AA_1 = h$ (т.е. точка K лежит между A и A_1). С возрастанием h возрастает угол α, и как мы установили ранее, уменьшается AK. В силу этой монотонности у уравнения $AK = h$ есть не более одного решения. При чём одно угадывается легко: $h = 2$. Действительно, если высота призмы равна стороне основания, то грань ABB_1A_1 становится квадратом, а AB_1 и KL – диагоналями этого квадрата. Поэтому точка K совпадёт с точкой A_1.

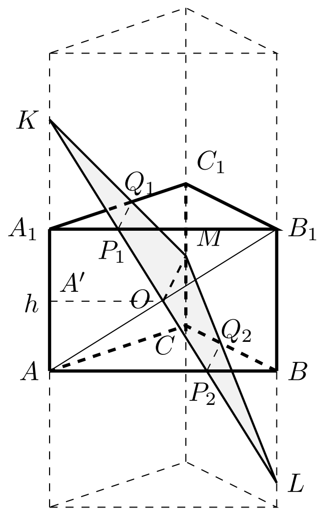
Итак, при $h \in [2, +\infty)$ сечением призмы будет треугольник $\triangle KLM$.



Его площадь нам известна, в терминах h она выражается как

$$S(h) = \frac{\sqrt{12 + 3h^2}}{h}, \quad h \in [2, +\infty).$$

При $h \in (0, 2)$ в сечении получится пятиугольник $P_1Q_1MQ_2P_2$.



Его площадь можно выразить как $S_{\triangle KLM} - 2S_{\triangle KP_1Q_1}$. Найдём площадь $S_{\triangle KP_1Q_1}$ из подобия треугольников $\triangle KP_1Q_1$ и $\triangle KOM$. Коэффициент подобия:

$$k = \frac{KP_1}{KO} = \frac{KA_1}{KA'}.$$

Знаменатель мы уже нашли: $KA' = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{h}$. Числитель:

$$KA_1 = KA - AA_1 = \frac{\sqrt{4+h^2}\sqrt{4+h^2}}{h\cdot 2} - h = \frac{4-h^2}{2h}$$

$$k = \frac{4-h^2}{2h}\cdot\frac{h}{2} = \frac{4-h^2}{4} = 1 - \frac{h^2}{4}.$$

Так как MO является высотой и медианой в треугольнике $\triangle KLM$, она делит его пополам: $S_{\triangle KOM} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle KLM}$. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому

$$S_{\triangle KP_1Q_1} = \frac{k^2}{2}S_{\triangle KLM}.$$

Искомая площадь сечения:

$$S = S_{\triangle KLM}\left(1 - 2\cdot\frac{k^2}{2}\right) = S_{\triangle KLM}(1-k^2);$$

$$S(h) = \frac{\sqrt{12+3h^2}}{h}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{16}\right) = \frac{(8h-h^3)\sqrt{12+3h^2}}{16}, \quad h\in(0,2).$$

Итого, площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданной плоскостью в зависимости от высоты призмы h:

$$S(h) = \begin{cases} \dfrac{(8h-h^3)\sqrt{12+3h^2}}{16}, & h \in (0,2); \\ \dfrac{\sqrt{12+3h^2}}{h}, & h \in [2,+\infty). \end{cases}$$

Нас интересует площадь $S_0 = \frac{28\sqrt{39}}{81}$. Убедимся, что на каждом из этих промежутков есть ровно решение $S(h) = S_0$.

Посмотрим на граничные значения: $S(+0) = 0$, $S(2) = \sqrt{6}$, $S(+\infty) = \sqrt{3}$. Нетрудно проверить, S_0 лежит между $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$. Причём на промежутке $[2,+\infty)$ функция $S(h)$ монотонно убывает, поскольку она равна $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$ и α возрастает с увеличением h. Значит на $[2,+\infty)$ есть ровно одно решение.

С промежутком $(0,2)$ придётся повозиться. Изучим поведение функции $S(h)$, взяв производную.

$$S'(h) = \frac{-12h^4 + 12h^2 + 96}{\sqrt{12+3h^2}}.$$

Она равна нулю в точках $\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}}$, кратность этих корней единица. Обозначим положительный корень через h_0. Он лежит между 0 и 2, поэтому поведение функции следующее: при $h \in (0,h_0]$ площадь сечения возрастает, а при $h \in [h_0, 2)$ убывает. $S(h_0)$ и $S(2)$ получаются бо́льшими, чем искомое значение S_0, поэтому на промежутке $(h_0,2)$ решения нет. Но поскольку $S(+0) < S_0 < S(h_0)$, решение есть на $(0,h_0)$.

Итак, у задачи есть два решения, по одному на каждом из промежутков.

На $(0,2)$ решение подбирается легко: $h = \dfrac{4}{3}$.

На $(2,+\infty)$ уравнение решается: $h = \sqrt{\dfrac{12}{S_0^2-3}}$. Подстановка S_0 даёт $h = \dfrac{162}{\sqrt{3631}} = \dfrac{162\sqrt{3631}}{3631}$. Условие $h \in (2,+\infty)$ выполняется. Значит нужное решение найдено.

Зная h, получаем значение объёма призмы: $V = h\sqrt{3}$.

Ответ: $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}, \dfrac{162\sqrt{10893}}{3631}.$
