

=====MM255=====

MM255 (7 баллов)

Решения принимаются до 04.10.2020.

Найти наименьшее натуральное число, имеющее ровно 7 представлений в виде произведения наибольшего возможного количества попарно различных натуральных сомножителей.

Ответ. Число 480 имеет ровно 7 представлений в виде произведения пяти попарно различных натуральных сомножителей:

$480 = 1*2*4*3*20 = 1*2*4*6*10 = 1*2*4*12*5 = 1*2*8*3*10 = 1*2*8*6*5 = 1*2*16*3*5 = 1*4*8*3*5$ и не имеет представлений в виде большего числа попарно различных натуральных сомножителей.

Доказательство минимальности ответа 480.

Число простых с учётом кратности	1	2	3	5	7	Сомножителей	Представлений	Число
0	1					1	1	1
1	1	1				2	1	
2	1	2				2	1	
	1	1	1			3	1	
3	1	3				3	1	
	1	2	1			3	2	12
	1	1	1	1		4	1	
4	1	4				3	1	
	1	3	1			4	1	
	1	2	2			4	1	
	1	2	1	1		4	3	60
	1	1	1	1	1	5	1	
5	1	5				3	2	
	1	4	1			4	2	
	1	3	2			4	3	
	1	3	1	1		5	1	
	1	2	2	1		5	1	
	1	2	1	1	1	5	4	
6	1	6				4	1	
	1	5	1			4	4	96
	1	4	2			5	1	
	1	4	1	1		5	3	
	1	3	3			5	1	
	1	3	2	1		5	5	360
7	1	7				4	1	
	1	6	1			5	1	
	1	5	2			5	2	
	1	5	1	1		5	7	480
	1	4	3			5	3	
8	1	8				4	2	
	1	7	1			5	2	

Таб. 1. Количество представлений некоторых чисел.

В каждом представлении числа в виде произведения максимального числа попарно различных сомножителей присутствуют сомножитель 1.

Так как $2^9 = 512 > 480$ и праймориал $p_5\# = 2310 > 480$, то достаточно рассмотреть числа, имеющие не более 8 простых множителей с учётом кратности, среди которых не более 4 различных. Для минимизации числа необходимо использовать наименьшие простые числа подряд, причём с ростом простого числа кратность его использования не должна повышаться. Все числа, которые достаточно рассмотреть, представлены в таблице 1.

Если рассмотреть общую задачу: найти наименьшее натуральное число, имеющее ровно n представлений в виде произведения наибольшего возможного количества попарно различных натуральных сомножителей, то получим последовательность:

1, 12, 60, 96, 360, 576, 480, 15120, 864, 2880, 3360, 6912, 25200, 7680, 20160, 36960, 4320, 93312, 46080, 82944, 221760, 34560...

Этой последовательности в OEIS нет.

