Решение задачи Матмарафона ММ256, Овчинников Денис

9 октября 2020 г.

Из формы уравнения видно, что, зная дробную часть некоторого корня уравнения x, можно однозначно восстановить его целую часть. В сущности, нам достаточно "подобрать" подходящую дробную часть, тогда целая определится автоматически. Кроме того, так как $\{x\}$ по определению не меньше нуля, то и $[x]$ неотрицательно, тогда $x \geq 0$. Нас интересуют рациональные решения, так что будем искать решение в виде $\{x\} = \frac{p}{q}$, где $p < q$ - взаимно простые натуральные числа. Случай $p = 0$ тривиален и дает очевидное решение $x = 0$, и в дальнейшем мы будем искусственно его учитывать для случая $q = 1$. Если $q > 1$, имеем следующие соображения: по условию,

$$n\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}$$

- целое. Следовательно, $q^2|np^2 + pq = p(np + q)$.

Из взаимной простоты p и q следует, что $q^2|np + q$, но тогда и $q|np + q \Rightarrow q|np$. Еще раз применяя условие взаимной простоты, получаем, что $q|n$. То есть, при заданном n, знаменатель любого рационального решения должен быть делителем n.

Установим, годится ли любой делитель n, и сколько различных значений p соответствует некоторому значению q. Пусть $n = qm$, подставим это равенство в выражения выше: $q^2|p(qmp + q) = pq(mp + 1)$. Из этого следует, что $q|mp+1$, т.е. mp и q не имеют общих делителей. Тогда m и q - тоже. То есть в качестве q подходит не любой делитель n, а такой, что n/q взаимно просто с q. Это означает, что если некоторое простое r входит в разложение n на простые множители в степени k_r, то в разложение q оно либо не входит, либо входит в той же степени k_r. Это ограничивает выбор q при заданном n, имеющем N простых делителей, 2^N вариантами.

Среди двух экстремальных случаев - $q = 1$ и $q = n$ - первый уже учтен, как тривиальный, а второй сводится к поиску целых значений выражения $\frac{p(p+1)}{n}$ при $p < n$. При этом дробь p/n несократима (ибо равна собственно $\{x\}$) и меньше единицы, значит, $(p+1)/n$ должно быть целым, что возможно лишь для $p = n - 1$. Тогда $x = n^2 - n + \frac{n-1}{n}$ - решение исходного уравнения.

Для промежуточных случаев заметим, что выбрав для данного n некоторое значение q (с учетом оговоренного выше правила), имеем условие $q|mp+1$, т.е. $mp+1 \equiv 0 \pmod q$. Добавим к обеим частям выражения $m(q-p)$ и получим: $mq+1 \equiv 1 \equiv m(q-p) \pmod q$.

Отсюда получаем, что $q-p \equiv m^{-1} \pmod q$. Поскольку мы выбираем q таким образом, что $m = n/q$ - взаимно простое с q, то число $m^{-1} \pmod q$ существует и единственно (по китайской теореме об остатках). Зная его, мы можем определить p и, таким образом, одно из решений исходного уравениея

Таким образом, алгоритм решения (перебора всех корней) уравнения при данном n таков:

1. Разложим n на простые множители: $n = \prod_{i=1}^{N} r_i^{k_i}$

2. Выберем q виде $q = \prod_{i=1}^{N} r_i^{d_i k_i}$, где $d_i \in \{0, 1\}$, и обозначим $m = n/q$.

3. Подберем $0 < s \leq q$ такое, что $sm \equiv 1 \pmod q$. При выполнении предыдущих пунктов автоматически гарантировано, что s существует и единственно (для $q = 1$ по умолчанию берем $s = 1$, для $q = n, m = 1$, автоматически получается то же $s = 1$).

4. Положим $p = q - s$.

5. Тогда решение уравнения: $x = \frac{np^2+2pq}{q^2}$

Каждое такое решение можно индексировать двоичным числом $d_1 d_2 ... d_N$, то есть индекс пробегает значения от 0 до $2^N - 1$, каждому соответствует ровно одно решение уравнения. Таким образом, при заданном n уравнение имеет ровно 2^N рациональных решений (включая $x = 0$), где N - количество простых делителей числа n. Для того, чтобы различных решений было не меньше K, требуется выполнение условия $2^N \geq K$, то есть $N \geq \log_2 K$. В случае $K = 1000000$ имеем $N \geq 19.9$, то есть требуется, чтобы у n было не менее 20 различных простых делителей.

Ответ. Наименьшее такое число - 20-й праймориал: $n = 71\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \approx 5.58 \cdot 10^{26}$.