Решение задачи Матмарафона ММ258, Овчинников Денис

23 октября 2020 г.

Рассмотрим числа $n = x0..0y0..0z0..0$, где (x, y, z) - некоторая перестановка $(1, 4, 9)$. Так как каждому n ставится в соответствие величина $f(n)$ - сумма квадратов цифр числа n^2, а добавление нулей не изменит этой суммы, то $f(10n) = f(n)$. Следовательно, при подсчете количества различных $f(n)$ мы можем исключить из рассмотрения числа с нулями в младших разрядах. Таким образом, нас интересуют числа вида

$$n = x0..0y0..0z = x \cdot 10^a + y \cdot 10^b + z, a > b > 0$$

Возведем это число в квадрат:

$$n^2 = x^2 \cdot 10^{2a} + 2xy \cdot 10^{a+b} + (y^2 \cdot 10^{2b} + 2xz \cdot 10^a) + 2yz \cdot 10^b + z^2$$

Можно записать следующие соотношения: $2a > a + b > 2b > b > 0, 2a > a + b > a > b > 0$ (важно отметить, что неравенства везде строгие). В общем случае мы не знаем о соотношении между $2b$ и a, что отражено в выделении этих двух членов отдельно в скобки, остальные расположены по уменьшению разрядов. На месте квадратов будут стоять, в каком-то порядке, числа 1, 16, 81 с нулями на конце, а на месте перекрестных членов - 8, 18, 72.

Мы можем представить себе вычисление n^2, как сложение в столбик шести чисел с одной или двумя значащими цифрами и некоторым количеством нулей. Если этих нулей достаточно, чтобы значащие цифры не перекрывались, то n^2 будет записана, как, в каком-то порядке, шесть чисел из абзаца выше, разделенные некоторым количеством нулей. Тогда $f(n) = 4 \cdot 1^2 + 2^2 + 6^2 + 7^2 + 3 \cdot 8^2 = 285$. Это первый элемент исследуемого множества.

Если разряды перекрываются, то при вычислении n^2 в этих разрядах будет происходит суммирование, и результат изменится. Так как все числа не превышают 100, то перекрывание разрядов случится, если разница показателей степеней у десятки равна 0 или 1. При этом в одном разряде перекроется только два числа. Обратим внимание, что перенос единицы случится только если складываются 81 и 72 в одном разряде - то есть при $2a = b$, но при этом сложатся $y^2 + 2xz$, то есть в сумме появятся комбинации цифр $1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 9 = 73, 4^2 + 2 \cdot 1 \cdot 9 = 34, 9^2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 89$, и такого сложения не произойдет.

Особый случай. Как указано выше, все показатели различны, кроме случая $a = 2b$. В десятичной записи это означает, что между цифрами x и y столько же нулей, сколько между y и z, а квадрат числа равен

$$n^2 = x^2 \cdot 10^{4b} + 2xy \cdot 10^{3b} + (y^2 + 2xz) \cdot 10^{2b} + 2yz \cdot 10^b + z^2$$

Пусть $b = 1$. Это числа вида xyz, то есть трехзначные. Всего таких чисел 6, и явным вычислением можно убедиться, что все они дают различные $f(n) = \{13, 139, 137, 86, 224, 234\}$, итого в нашем множестве 7 элементов.

Пусть $b \geq 2$. Тогда видно, что разность показателей у десятки различается, по меньшей мере, на 2, поэтому поразрядное сложение будет проводиться только для члена с 10^{2b}, и разным b соответствуют лишь различное количество нулей между группами цифр. Рассмотрим это число: $y^2 + 2xz = \{73, 34, 89\}$. Легко видеть, что оно симметрично относительно пары (x, z). У числа n^2 тоже появляется своего рода симметрия (с оговоркой, что переставляются пары цифр), поэтому выполнится, например, $f(x0y0z) = f(z0y0x)$, и для перебора случаев достаточно перебрать только y. Таким образом, для чисел такого вида есть три различных $f(n) = \{301, 208, 289\}$. Эти числа, вместе с предыдущими, дают 10 элементов множества.

Далее в нашем рассмотрении останутся только числа, для которых $a \neq 2b$, перекрытие будет происходить всегда только на один разряд. Можно выделить следующие случаи:

b=1. То есть перекрытие встретится в младших разрядах. При этом, так как $a > b = 1, a \neq 2b = 2$, то $a \geq 3$.

$$n^2 = x^2 \cdot 10^{2a} + 2xy \cdot 10^{a+1} + 2xz \cdot 10^a + y^2 \cdot 10^2 + 2yz \cdot 10 + z^2$$

Видно, что $(2a) - (a + 1) = a - 1 \geq 2$, поэтому перекроются разряды при сложении $2xy \cdot 10 + 2xz$, а также $(10y + z)^2$. При этом надо выделить случай $a = 3$, так как при этом перекрываются разряды в сложении $2xz \cdot 10 + y^2$. То есть следует различать два вида чисел: $x0yz$ и $x0..0yz$. Симметрии здесь уже нет, поэтому произойдет перебор всех перестановок, для каждого вида встретится по 6 $f(n)$, соответственно, $f(n) = \{19, 228, 113, 200, 216, 305\}$, $f(n) = \{167, 303, 113, 287, 216, 289\}$. Обратим внимание, что некоторые элементы последнего подмножества уже встречались раньше, поэтому в исследуемом множестве, по текущему подсчету, 19 элементов.

a-b=1. Здесь зеркальная ситуация: перекрытие в старших разрядах:

$$n^2 = x^2 \cdot 10^{2b+2} + 2xy \cdot 10^{2b+1} + y^2 \cdot 10^{2b} + 2xz \cdot 10^{b+1} + 2yz \cdot 10^b + z^2$$

Как и прежде, особо следует рассмотреть случай, когда $(2b) - (b+1) = 1$, то есть $b = 2$. Это числа вида: $xy0z$ и $xy0..0z$. Второй вид, однако, даст тот же результат, что и числа $z0..0xy$, поэтому не добавляет ничего нового. А первый дает $f(n) = \{240, 303, 115, 301, 167, 315\}$, добавляя еще три элемента в множество (всего теперь 22).

Исключительный случай. Теперь рассматриваем случаи, когда $a \neq 2b, b \geq 2, a - b \geq 2$.

$$n^2 = x^2 \cdot 10^{2a} + 2xy \cdot 10^{a+b} + (y^2 \cdot 10^{2b} + 2xz \cdot 10^a) + 2yz \cdot 10^b + z^2$$

Теперь видно, что $(2a) - (a+b) = a - b > 1, (a+b) - (2b) = a - b > 1, (a+b) - a = b > 1, (2b) - b = b > 1, a - b > 1, b - 0 = b > 1$ - перекрытия в этих парах нет. Но перекрытие теперь может возникнуть только при $2b - a = 1 \rightarrow a = 2b - 1$ - это числа вида $x0y00z$ или $a - 2b = 1 \rightarrow a = 2b + 1$, числа $x00y0z$. В данном случае ряд чисел продолжается добавление одинакового количества нулей слева и справа от y. Здесь так же видна симметрия относительно перестановки x и z, поэтому эти случаи добавят подмножества $f(n) = \{301, 194, 285\}$, $f(n) = \{297, 285, 299\}$. Исключая повторы, заключаем, что в искомое множество войдут 25 элементов.

Следует отдельно отметить, что явное вычисление конкретных $f(n)$ необходимо, поскольку существуют n, для которых n^2 в десятичной записи содержат различные наборы цифр, но $f(n)$ одинаково. Некоторые числа возможно было бы исключить и из качественных соображений, пользуясь тем, что некоторые слагаемые в n^2 содержат только одну значащую цифру, но - что выясняется только при прямом вычислении - может возникнуть и это совпадение результата. Такая пара, впрочем, только одна:

$n = 9104, n^2 = 82882816, f(n) = 301$

$n = 10904, n^2 = 118897216, f(n) = 301$

Ответ. Такое множество содержит 25 элементов: $\{13, 19, 86, 113, 115, 137,$
$139, 167, 194, 200, 208, 216, 224, 228, 234, 240, 285, 287, 289, 297, 299, 301,$
$303, 305, 315\}$