Задача 262

18 марта 2021 г.

автор решения - Овчинников Денис

Запишем свойства данных замечательных точек треугольника, которые потребуются в нашем доказательстве.

1. Центр Шпикера O совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, образованный серединными линиями исходного треугольника (на рис. 1 это $\triangle FIJ$).

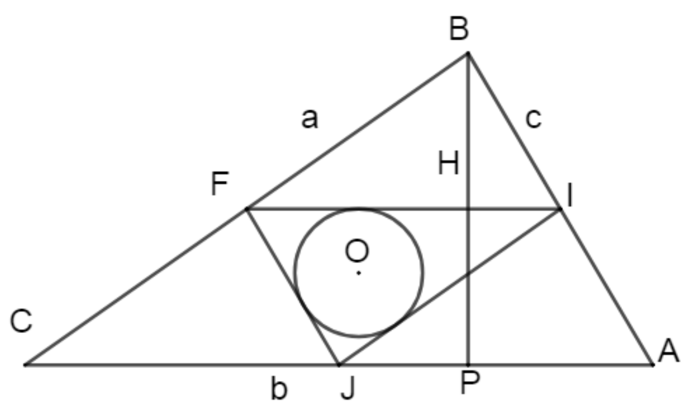

Рис. 1. Положение центра Шпикера.

2. Прямые, проходящие через вершины треугольника и точку Нагеля M (например, CM, AM), делят периметр пополам, пересекая таким образом стороны AB, BC в точках D, E, отстоящих от, соответственно, вершин A, C на равные расстояния $d = AD = CE$ (это ясно из того, что сумма $AC + AD$ равна полупериметру, как и $CA + CE$).

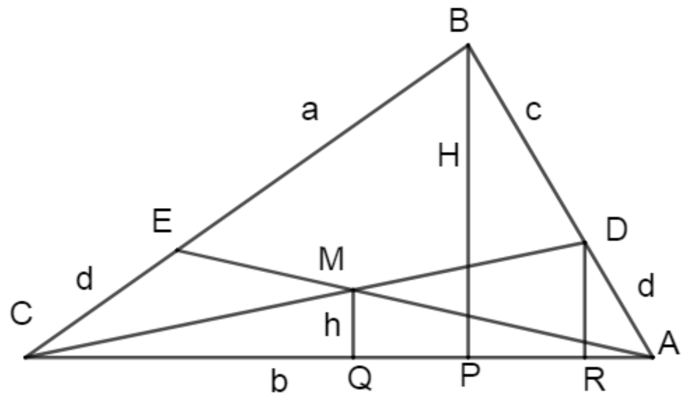

Рис. 2. Положение точки Нагеля.

Пусть мы имеем разносторонний треугольник ABC, длины сторон которого, соответственно, сторонами $BC = a, AC = b, AB = c, P = a + b + c$ - его периметр. Опустим из вершины B высоту $BP = H$, тогда площадь треугольника $S = \frac{bH}{2}$, радиус вписанной окружности $r = \frac{2S}{P}$, расстояние, обозначенное выше: $d = \frac{a-b+c}{2}$. Обозначим также его углы: $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle ACB$.

Центр Шпикера отстоит от серединной линии треугольника FI на радиус окружности, вписанной в меньший треугольник, r_1. То есть, находится от стороны AC на расстоянии $\frac{H}{2} - r_1$. Поскольку треугольники подобны с коэффициентом подобия 2, то $r_1 = \frac{r}{2}$, так что расстояние от центра Шпикера до стороны AC равно

$$D_s = \frac{H-r}{2} = \frac{2S/b-2S/P}{2} = \frac{S(a+c)}{bP}$$

Опустим теперь на сторону AC перпендикуляры $MQ = h, DR$. Видно, что величина h равна расстоянию от точки Нагеля до стороны AC.

Тангенс угла $\angle DCA$ равен:

$$\operatorname{tg} DCA = \frac{MQ}{CQ} = \frac{DR}{CR} = \frac{d \sin \alpha}{b-d \cos \alpha}.$$

Отсюда $CQ = \frac{h(b-d \cos \alpha)}{d \sin \alpha}$.

Аналогично, $AQ = \frac{h(b-d \cos \gamma)}{d \sin \gamma}$.

Сложив эти два выражения, получим:

$$\begin{aligned} b = CQ + AQ = \frac{h(b-d \cos \alpha)}{d \sin \alpha} + \frac{h(b-d \cos \gamma)}{d \sin \gamma} = \\ = \frac{h}{2d \sin \alpha \sin \gamma}(2b(\sin \alpha + \sin \gamma) - (a + c - b) \sin \beta) \end{aligned}$$

Заметим, что из теоремы синусов для исходного треугольника

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

следует, что $b\sin\alpha = a\sin\beta, b\sin\gamma = c\sin\beta$, и тогда

$$b = \frac{h\sin\beta}{2d\sin\alpha\sin\gamma}(2a + 2c - a - c + b) = \frac{hP\sin\beta}{2d\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{bhP}{2cd\sin\alpha}$$

То есть, $2bc\sin\alpha \cdot d = 4Sd = bhP$.

Таким образом, расстояние от точки Нагеля до стороны AC равно

$$D_n = h = \frac{4Sd}{bP} = \frac{2S(a+c-b)}{bP}$$

Прямая MO параллельна прямой AC тогда и только тогда, когда имеет место равенство $D_s = D_n$, а точки O, M лежат по одну сторону от AC. Второе условие обеспечивается по определению: обе эти точки лежат внутри треугольника, а первое достигается при

$$\frac{S(a+c)}{bP} = \frac{2S(a+c-b)}{bP},$$

что равносильно равенству

$$a + c = 2b.$$

Таким образом, в разностороннем треугольнике прямая, проведенная через центр Шпикера и точку Нагеля, параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда длина рассматриваемой стороны равна полусумме длин остальных сторон (или, что то же самое, одной трети периметра). Такие три числа составляют арифметическую прогрессию, и соответствующая сторона должна быть средней среди остальных, то есть если данный треугольник прогрессивен, что и требовалось доказать.

Заметим, что из вышедоказанного следует, что в том же треугольнике расстояния от обеих точек до любой двух других сторон треугольника (в общем случае треугольника - из трех) будут различаться. Отсюда следует, что, во всяком случае, центр Шпикера и точка Нагеля не могут совпадать, поэтому прямую OM всегда можно провести, причем единственным образом. Вырожденный случай правильного треугольника, единственный, когда они совпадают, не соответствует условию задачи.