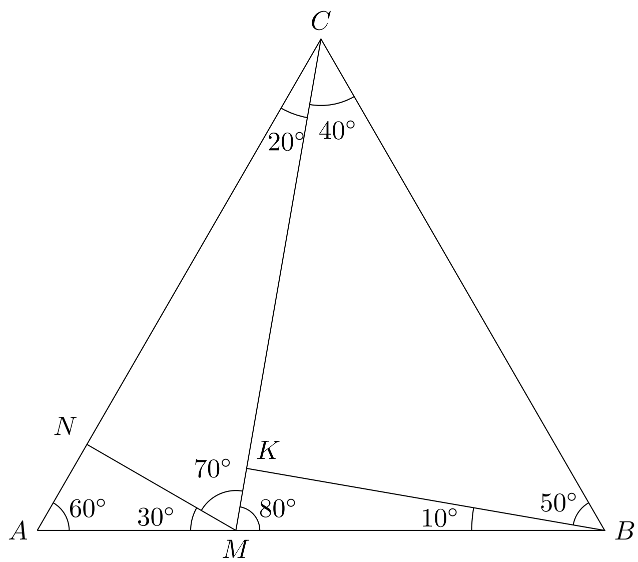
MM265

Дзюбенко В.А.

Разрезать правильный треугольник на наименьшее возможное количество прямоугольных треугольников так, чтобы никакие два из возникших треугольников не были подобны.

Ниже на картинке изображено разбиение равностороннего треугольника $\triangle ABC$ на четыре прямоугольных треугольника, никакие два из которых не подобны. Для построения проведём отрезок CM к стороне AB, разбивающий угол $\angle C$ на $\angle ACM = 20°$ и $\angle MCB = 40°$. Из точки M опустим высоту MN на сторону AC, из точки B опустим высоту BK на отрезок CM.



Осталось доказать, что на меньшее количество треугольников разрезать не получится. Давайте предположим, что возможно разрезание $\triangle ABC$ на три треугольника. У этих треугольников в совокупности есть шесть острых углов и три прямых угла, причём острые углы должны быть все различны, иначе среди треугольников будут подобные (кроме случая, когда один из треугольников равнобедренный, в этом случае будет два угла по 45°). Сумма всех этих углов равна $180° \cdot 3 = 540°$, а сумма острых – $540° - 270° = 270°$.

У исходного треугольника были углы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, каждый из них равен по 60°. Ключевое замечание в том, что когда мы разрезали треугольник на три, через каждый угол исходного треугольника может либо не проходить ни один разрез, либо проходить. В первом случае этот угол будет целиком являться острым углом одного из кусочков, а во втором случае разбиваться на нескольких острых углов, принадлежащих кусочкам.

Чтобы было понятнее, о чём идёт речь, посмотрим на примере картинки выше. На ней угол $\angle A$ целиком принадлежит треугольнику $\triangle ANM$, потому что через него не проходит ни один разрез. Угол $\angle B$ делится разрезом на углы $\angle MBK$ и $\angle KBC$. Угол $\angle C$ делится на углы $\angle NCM$ и $\angle KCB$.

Отметим, что все такие углы, у которых вершина совпадает с A, B или C, являются острыми, а сумма таких углов равна сумме углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$, то есть $180°$.

Вернёмся к нашему разрезанию на три треугольника. Сколько углов могут иметь вершину в A, B или C? Очевидно, не более шести, ведь острых углов в совокупности всего шесть.

Шесть быть не может, ведь тогда сумма всех острых углов будет равна $180°$, а должна быть $270°$.

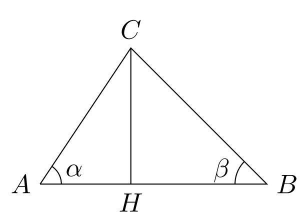
Пять быть не может по схожей причине. Предположим, что может. Обозначим оставшийся острый угол α. Тогда $180° + \alpha = 270°$, откуда $\alpha = 90°$ – противоречие.

Четыре и меньше тоже быть не может, потому что разрезанным в этом случае окажется максимум один угол. Остальные два будут нетронуты, т.е. будет как минимум два угла по $60°$, а это противоречит отсутствию подобия.

Значит, разрезание на три треугольника невозможно. На два треугольника оно также невозможно, поскольку острых углов тогда будет всего четыре, и, аналогично рассуждению выше, два из них будут по $60°$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу разрезания произвольного треугольника на прямоугольные треугольники, любая пара которых не является подобной. Отдельно посмотрим на все возможные случаи треугольников.

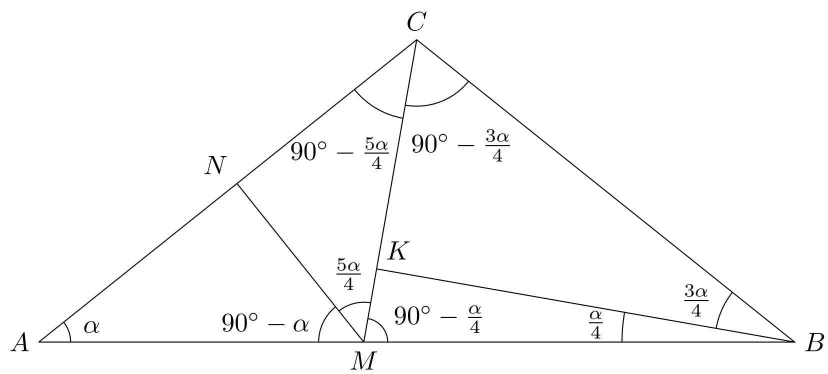
Остроугольный разносторонний треугольник. Проведя из любой вершины высоту, получим разрезание на два треугольника. Неразрезанные углы обозначим α и β. Они не равны, так как треугольник разносторонний, и при этом не выполняется $\alpha = 90° - \beta$, в противном случае третий угол был бы прямой. Итак, остроугольный разносторонний треугольник можно разрезать на два.



Остроугольный равнобедренный треугольник, не являющийся правильным. То же самое, только разрез нужно производить не из произвольной вершины, а из вершины основания.

Тупоугольный разносторонний треугольник. То же самое, только высоту нужно проводить из тупого угла.

Тупоугольный равнобедренный треугольник. Здесь уже сложнее. Приведём пример разрезания на четыре треугольника. Обозначим угол при основании α, тогда угол при вершине равен $180°-2\alpha$, и, поскольку треугольник тупоугольный, $\alpha < 45°$. Разрежем его так, как изображено на картинке ниже.



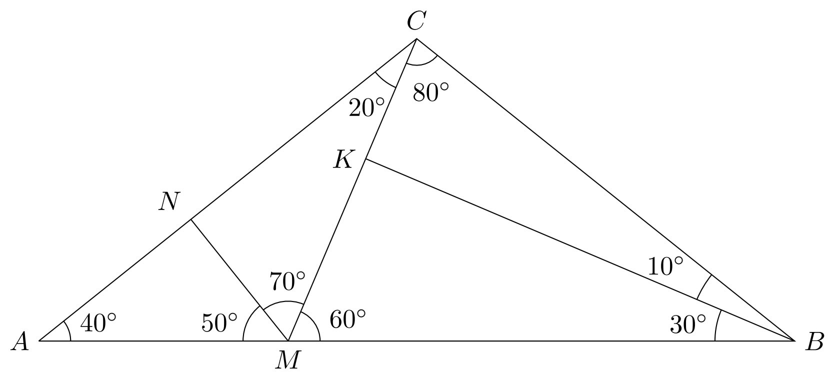
Докажем, что это разрезание будет валидно всегда, кроме одного значения α. Обратим внимание, что $\frac{5\alpha}{4} < 56.25°$. Посмотрим на разные случаи:

- В случае, если $\frac{5\alpha}{4} < 45°$, получаем, что углы $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{3\alpha}{4}$, α и $\frac{5\alpha}{4}$ все различны и все меньше $45°$, отсюда следует, что все оставшиеся острые углы больше $45°$ и тоже различны. Значит различными являются вообще все углы в совокупности, и потому нет пары подобных треугольников;

- Если $\frac{5\alpha}{4} = 45°$, то разрезание тоже удовлетворяет условию: получаем четыре различные пары углов: $\frac{\alpha}{4}$ и $90° - \frac{\alpha}{4}$, $\frac{3\alpha}{4}$ и $90° - \frac{3\alpha}{4}$, α и $90° - \alpha$, $45°$ и $45°$: среди треугольников снова нет пары подобных;

- Если $45° < \frac{5\alpha}{4} < 56.25°$, тогда $33.75° < 90° - \frac{4\alpha}{3} < 45°$. Поэтому углы $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{3\alpha}{4}$, α, $90° - \frac{5\alpha}{4}$ будут меньше $45°$, но на этот раз они не обязаны быть различны: вполне возможен случай $90° - \frac{5\alpha}{4} = \alpha$, т.е. $\alpha = 40°$. Остальным углам этот угол равен быть не может, так как они меньше $33.75°$.

Итак, приведённое разрезание подходит для всех случаев кроме $\alpha = 40°$, поэтому для него придётся придумать отдельное:



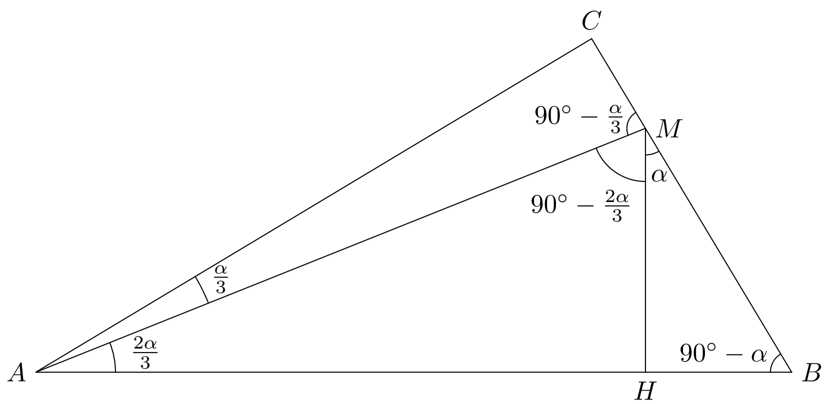
Мы показали, что любой тупоугольный равнобедренный треугольник можно разрезать на четыре треугольника. Осталось доказать, что меньше быть не может. Обратим внимание, что тупой угол обязан быть разрезан (в результирующих треугольниках все углы острые или прямые), при этом среди составляющих его углов может быть один прямой. Также обязан быть разрезан хотя бы один из углов при основании (иначе среди острых углов окажутся два равных).

Предположим, что разрезание на три треугольника возможно. Если резать тупой угол только на острые, то доказательство невозможности очень похоже на доказательство для равностороннего треугольника: острых углов, совпадающих с A, B или C, всего шесть или пять, и оба варианта невозможны. Если отрезать от тупого угла прямой, то получим, что при A, B и C лежат четыре, пять либо шесть острых углов и дают в сумме $90°$. Это тоже невозможно:

- Шесть не могут, поскольку сумма шести острых углов должна быть равна $270°$;
- Если пять могут, тогда, обозначив шестой острый угол α, получим $90° + \alpha = 270°$, что невозможно;
- Если четыре могут, тогда, обозначив оставшиеся острые углы α и β получим $90° + \alpha + \beta = 270°$, т.е. $\alpha + \beta = 180°$ – тоже невозможно для острых углов.

Той же техникой подсчёта углов легко показать, что и на два треугольника нельзя разрезать: поскольку должен быть разрезан тупой угол и хотя бы один угол при основании, а в результате должно получиться четыре острых угла, то единственный способ это сделать – разрезать тупой угол на прямой и острый, но тогда сумма острых будет равна $90°$ вместо положенных $180°$.

Прямоугольный треугольник. Можно сказать, что он уже сам является подходящим разрезанием, но давайте попробуем поискать нетривиальное разрезание. Обозначим за α его острый угол, не превышающий $45°$, тогда его следующим образом можно легко разрезать на три треугольника.



Покажем, что на два разрезать нельзя. У нас имеются углы $\angle A = \alpha$ и $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Если после разрезания они находятся в одном и том же результирующем треугольнике, тогда нетрудно понять, что разрезание тривиальное (треугольник однозначно определяется стороной и двумя углами). Значит, они не могут принадлежать одному и тому же треугольнику, и поэтому, чтобы избежать подобия, один из них должен быть разрезан. Получаем три острых угла, дающих в сумме 90°, поэтому четвёртый тоже будет равен 90° – противоречие.

Ответ: Наименьшее возможное количество треугольников при разрезании

- правильного треугольника – 4;
- остроугольного неправильного – 2;
- тупоугольного разностороннего – 2;
- тупоугольного равнобедренного – 4;
- прямоугольного – 3 при нетривиальном разрезании.
