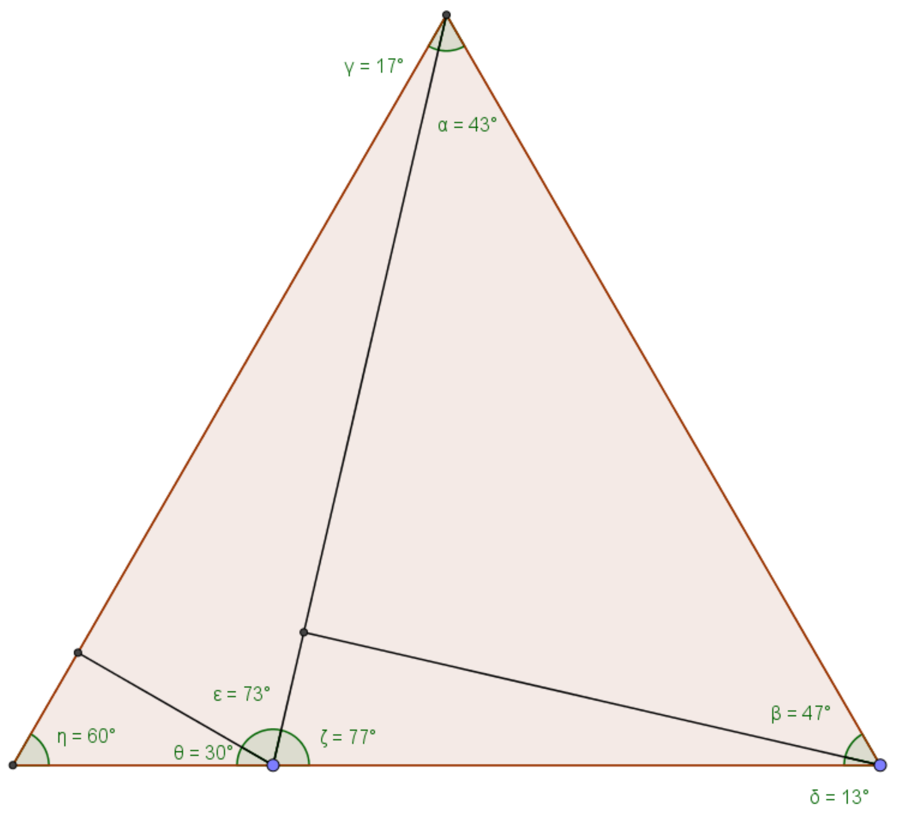
Олег Полубасов   8.03.2021 г.

================
MM265 (5 баллов)
Решения принимаются до 24:00 msk 11.04.2021

Разрезать правильный треугольник на наименьшее возможное количество прямоугольных треугольников так, чтобы никакие два из возникших треугольников не были подобны.
==



Ответ. 4 треугольника.

Доказательство минимальности ответа

Чтобы два прямоугольных треугольника не были подобными, у них не должно быть одинаковых острых углов. Поэтому необходимо разрезать не менее двух углов исходного равностороннего треугольника, причём в разных отношениях.

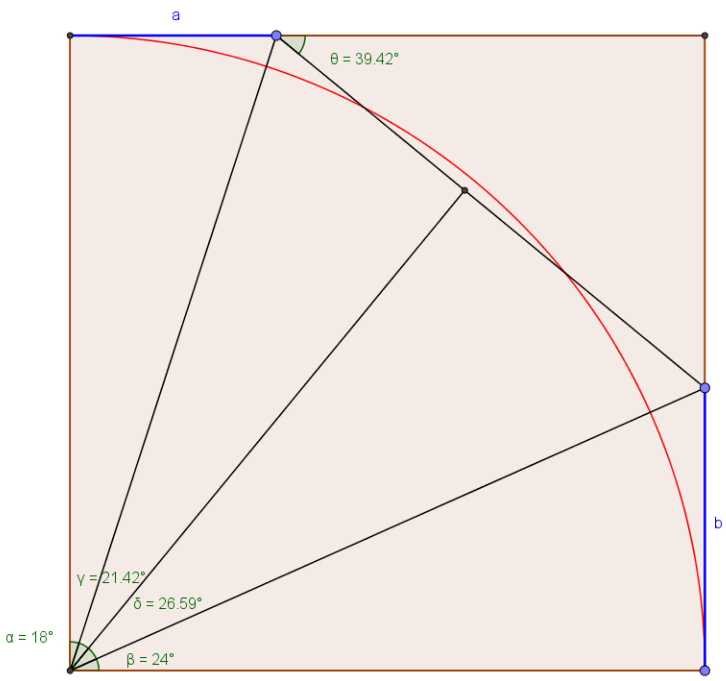
Пусть один угол разделили на α и $\gamma = 60^\circ - \alpha$, а второй – на β и $\delta = 60^\circ - \beta$. Эти четыре угла принадлежат не менее чем трём разным треугольникам. Да ещё остался треугольник с неразрезанным углом 60°. Поэтому треугольников не может быть меньше четырёх.

Если же попытаться разрезать все три угла исходного треугольника и распределить получившиеся три пары углов между тремя треугольниками, то три прямых угла, сошедшиеся в одной точке не дадут в сумме 360°.

Имеется бесконечно много решений:

$30^\circ < \alpha < 60^\circ$, $\alpha \neq 45^\circ$,
$\beta = 90^\circ - \alpha$,
$\gamma = 60^\circ - \alpha$,
$\delta = 60^\circ - \beta = \alpha - 30^\circ$,
$\varepsilon = 90^\circ - \gamma = \alpha + 30^\circ$,
$\zeta = 90^\circ - \delta = 120^\circ - \alpha$.

Обобщение

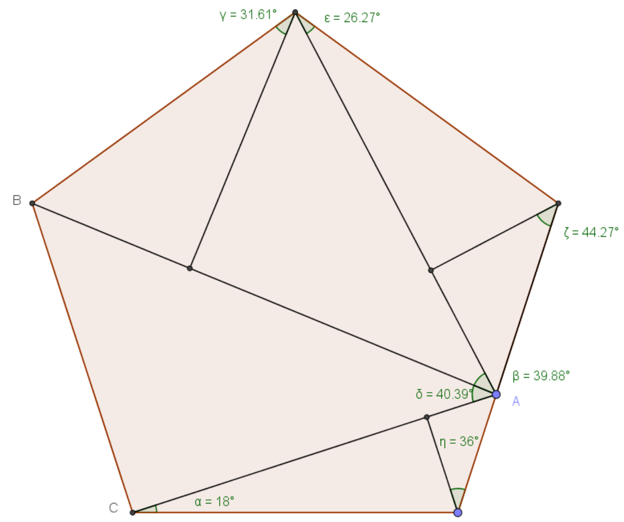


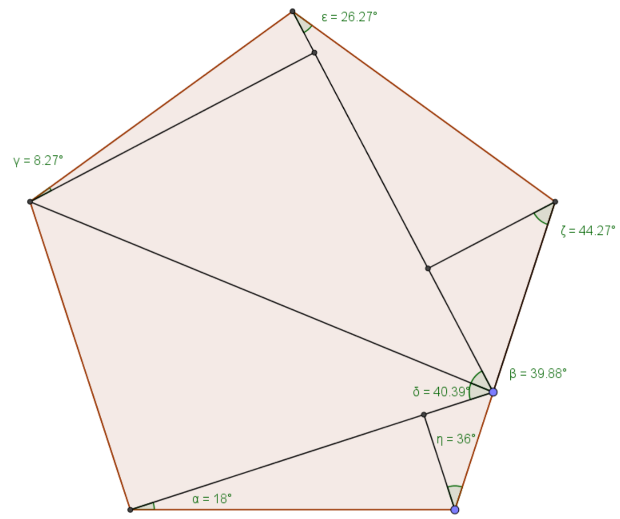
Квадрат можно разрезать на 5 бесподобных прямоугольных треугольников. Имеется бесконечно много решений. Пусть сторона квадрата равна 1. Зададимся длинами отрезков a и b. $0 < a < b < 1$. Тогда:

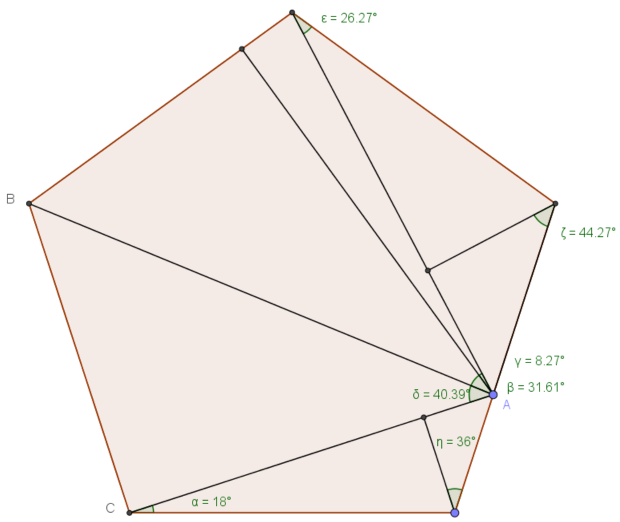
$\beta = \operatorname{arc\,tg} b < 45^\circ$,
$\alpha = \operatorname{arc\,tg} a < \beta < 45^\circ$,
$\theta = \operatorname{arc\,tg}((1 - b)/(1 - a)) < 45^\circ$,
$\gamma = \theta - \alpha < \theta < 45^\circ$,
$\delta = 90^\circ - \theta - \beta < 45^\circ$.

Необходимо исключить следующие соотношения:

$\gamma \leq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \alpha \Leftrightarrow (1 - b)/(1 - a) \leq a \Leftrightarrow b \geq a^2 - a + 1$,
$\alpha = \gamma \Leftrightarrow \beta = \delta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 45^\circ \Leftrightarrow a + b = 1 - ab \Leftrightarrow b = (1 - a)/(1 + a)$,
$\alpha = \delta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - \theta \Leftrightarrow (a + b)/(1 - ab) = (1 - a)/(1 - b)$,
$\beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta = \theta \Leftrightarrow (a + b)/(1 - ab) = (1 - b)/(1 - a)$,
$\beta = \theta \Leftrightarrow b = (1 - b)/(1 - a) \Leftrightarrow b = 1/(2 - a)$,


γ = 31.61°
ε = 26.27°
B
ζ = 44.27°
β = 39.88°
δ = 40.39°
A
η = 36°
C
α = 18°

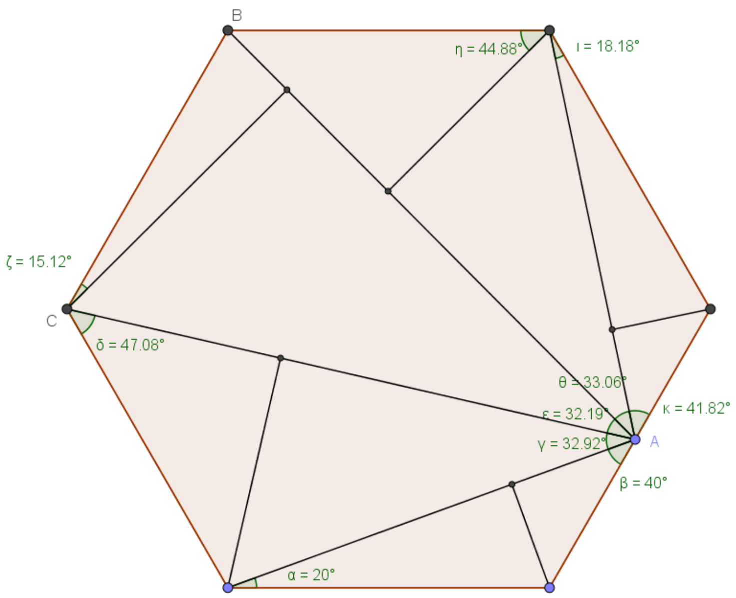

ε = 26.27°
γ = 8.27°
ζ = 44.27°
β = 39.88°
δ = 40.39°
η = 36°
α = 18°


ε = 26.27°
B
ζ = 44.27°
γ = 8.27°
β = 31.61°
δ = 40.39°
A
η = 36°
C
α = 18°

С правильным пятиугольником – совсем иная картина. Выберем на стороне пятиугольника точку А так, чтобы треугольник АВС оказался прямоугольным. Соединим точку А со всеми вершинами пятиугольника, не инцидентными этой стороне. Получим один прямоугольный треугольник, один остроугольный и два тупоугольных. Разрезав каждый из непрямоугольных треугольников на два прямоугольных, получим разрезание правильного пятиугольника на 7 попарно не подобных прямоугольных треугольников.

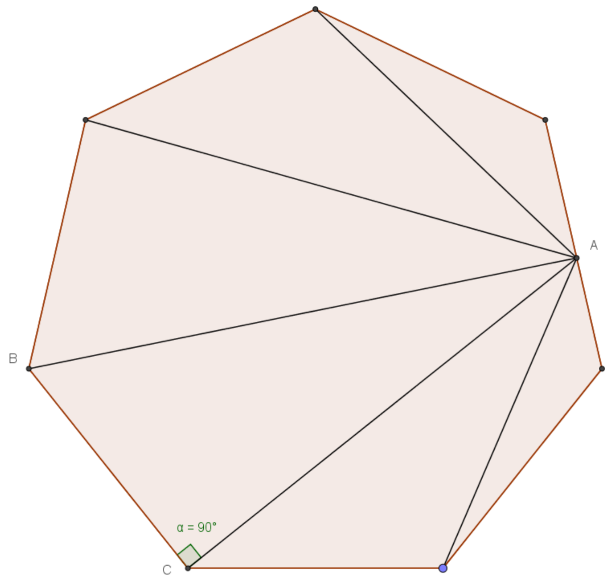
Тупоугольные треугольники можно разрезать единственным способом, а остроугольный – тремя способами, поэтому существует всего 3 различных разрезания.

Величины наименьших углов в треугольниках указаны приближённо, только для того, чтобы убедиться, что углы значимо различаются.



Рассмотрим правильный n-угольник с чётным числом сторон n ≥ 6. Выберем на стороне (не в угле) n-угольника точку А и соединим её со всеми вершинами, не инцидентными этой стороне. Получим n-1 треугольник. Среди них нет прямоугольных, потому что в правильном n-угольнике с чётным числом сторон проходящий через угол перпендикуляр к стороне второй раз пересекает прямоугольник в угловой точке. Разрезав каждый из треугольников на два прямоугольных, получим разрезание правильного n-угольника на 2n-2 прямоугольных треугольника. Из точки А под наименьшим углом видна противоположная сторона n-угольника ВС. Другие стороны видны из А под тем большим углом, чем дальше они находятся от ВС. Таким образом, углы, инцидентные точке А, образуют две возрастающие последовательности. Если сместить точку А, то углы изменяют свою величину непрерывным образом с попарно различными производными. Поэтому, если какие-то из углов случайно совпадут, то их можно сделать различными с помощью небольшого смещения точки А.

Следовательно, существует бесконечно много разрезаний правильного n-угольника с чётным числом сторон n ≥ 6 на 2n-2 попарно не подобных прямоугольных треугольника.



Теперь рассмотрим правильный n-угольник с нечётным числом сторон n ≥ 5. Можно разрезать его на 2n-2 попарно не подобных прямоугольных треугольника описанным выше способом. Но при нечётных n можно выбрать точку A на стороне n-угольника (не в угле) так, чтобы треугольник ABC оказался прямоугольным. Соединив точку A со всеми вершинами пятиугольника, не инцидентными этой стороне, получим n-2 не прямоугольных треугольника и один прямоугольный, который разрезать не требуется. Так получается разрезание правильного n-угольника с нечётным числом сторон n ≥ 5 на 2n-3 прямоугольных треугольника.

В этом решении положение точки A на стороне n-угольника определяется жёстко, её нельзя чуть-чуть сместить. Поэтому какие-то пары треугольников могут оказаться подобными. Существуют ли нечётные n > 5, не допускающие разрезаний правильного n-угольника на 2n-3 попарно не подобных прямоугольных треугольника, – открытый вопрос. Численно удалось проверить все n до 463, потом стало не хватать машинной точности.