MM266

Дзюбенко В.А.

Вася Пупкин выписал дни рождения семерых своих однокурсников, родившихся в январе одного и того же года, что и Вася, и, поэкспериментировав с выписанными числами, заметил два факта:
1) $\tau(n^3) = \tau(n)^2$, где n – произведение всех выписанных чисел;
2) сумма кубов составных чисел больше суммы кубов остальных.
Найдите дни рождения Васиных товарищей, если известно, что все они младше Васи.

Примечание: при сравнении возрастов учитываются дни, но не часы рождения.

Переведём условие задачи на язык чисел. В январе 31 день. Поскольку все одногруппники младше Васи, это значит, они не могли родиться первого января, то есть все числа лежат в промежутке $[2, 31]$.

Посмотрим, что означает условие на количество делителей. Если n имеет следующее разложение на простые $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $\alpha_i \geq 1$ (не смотрим на простые, не участвующие в разложении), тогда:

$$\tau(n^3) = (3\alpha_1 + 1) \ldots (3\alpha_k + 1)$$

$$\tau(n)^2 = (\alpha_1 + 1)^2 \ldots (\alpha_k + 1)^2$$

Если $\alpha_i = 1$ для всех i, тогда требуемое равенство достигается. В противном случае оно не может достигаться. Неравенство $(\alpha_i + 1)^2 \geq (3\alpha_i + 1)$ эквивалентно неравенству $\alpha_i^2 - \alpha_i \geq 0$, поэтому при ограничении $\alpha_i \geq 1$ выполняется всегда. Если же $\alpha_i > 1$, то $(\alpha_i + 1)^2 > (3\alpha_i + 1)$. Поэтому если найдётся такой индекс i что $\alpha_i > 1$, из этого будет следовать $\tau(n)^2 > \tau(n^3)$.

Итак, условие под номером 1 эквивалентно тому, что произведение всех чисел n свободно от квадратов, то есть все простые числа в разложении n входят в него в первой степени.

Теперь самое интересное для анализа условие – второе. Из простых чисел из требуемого промежутка нужно «сконструировать» семь чисел, каждое из которых будет являться днём в январе (не должно превосходить 31), и при этом сумма кубов составных больше суммы кубов простых (а других и нету).

Будем исследовать их разницу $S_c - S_p$, где S_c – сумма кубов составных, S_p – простых, и смотреть, когда она может быть больше нуля. Рассмотрим различные варианты количества составных чисел.

Если есть одно составное число, и оно состоит из трёх множителей, тогда оно однозначно определяется: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $S_c = 27000$, S_p состоит из шести слагаемых и оценивается снизу минимальными возможными слагаемыми: $S_p \geq 7^3 + 11^3 + \ldots + 23^3 = 27810$, поэтому $S_c - S_p < 0$.

Если одно составное число, состоящее из множителей p и q, тогда $S_c = p^3q^3$, а S_p также состоит из шести слагаемых, и для её оценки прибегнем к следующему трюку: сосчитаем сумму кубов восьми минимальных простых (от 2 до 19) и вычтем из неё те два простых, которые войдут в составное (в силу ограничения $pq \leq 31$ это можно сделать: p и q не могут превосходить 13, поэтому их придётся «забрать» из этого набора). Так можно получить оценку:

$$S_c - S_p \leq p^3q^3 - (2^3 + 3^3 + \ldots + 19^3 - p^3 - q^3)$$

$$S_c - S_p \leq p^3q^3 + p^3 + q^3 - 15803$$

Выражение симметрично по p и q, поэтому посмотрим на подходящие неупорядоченные пары: $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{2,7\}$, $\{2,11\}$, $\{2,13\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$. Перебор по ним показывает, что пара $\{2,13\}$ – единственное решение, при остальных рассматриваемая разность заведомо меньше нуля. При этом S_p должен быть равен своему минимальному значению: следующее по величине значение получится заменой 19 на 23, и в этом случае $S_c - S_p$ тоже становится меньше нуля.

Если же составных числа два, тогда нетрудно убедиться, что одно из них делится на 2, а другое на 3, то есть они имеют вид $2p$ и $3q$, и теперь можно проделать такую же оценку:

$$S_c - S_p \leq 2^3p^3 + 3^3q^3 - (2^3 + \ldots + 23^3 - 2^3 - p^3 - 3^3 - q^3)$$

$$S_c - S_p \leq 9p^3 + 28q^3 - 27935$$

Здесь подходящие пары (p,q) следующие (уже упорядоченные): $(5,7)$, $(7,5)$, $(11,5)$, $(11,7)$, $(13,5)$, $(13,7)$. Среди них тоже есть одно решение: $(13,7)$, и оно нам подходит опять же только при минимально возможном значении S_p.

Три и больше составных числа не может быть, так что у задачи есть только два решения.

Ответ: $3, 5, 7, 11, 17, 19, 26$ или $5, 11, 17, 19, 21, 23, 26$.
