Олег Полубасов   09.05.2021 г.

================
ММ269 (11 баллов)
Решения принимаются до 24:00 msk 11.05.2021

Вектором граней выпуклого многогранника P назовем набор $[f_3, f_4, \ldots, f_s]$, где f_i – количество i-угольных граней P, а s - наибольшее число сторон грани. Будем говорить, что P относится к классу m, если $\max(f_i)=m$.

Какова максимальная возможная степень вершины выпуклого многогранника
а) класса 3;
b) класса 4?
==

Ответ. В общем случае максимальная возможная степень вершины равна $\left\lfloor\frac{23m-14}{8}\right\rfloor$, если m ≥ 3, и 3, если m = 2. В частности, а) 6, б) 9.

Решение

Обозначим через F количество граней, через V – количество вершин, через E – количество рёбер, через m – класс многогранника, через x – максимальную степень вершины (искомую величину).

По теореме Эйлера: V = E – F + 2. Так как степень любой вершины не меньше 3, то максимальная степень

$$x \le 2E - 3(V-1) = 3F - E - 3 = 3\sum_{i=3}^{s} f_i - \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{s} i f_i - 3 =$$

$$\sum_{i=3}^{s}\frac{(6-i)f_i}{2} - 3 \le \frac{(6-3)f_3}{2} + \frac{(6-4)f_4}{2} + \frac{(6-5)f_5}{2} - 3 \le 3m - 3. \qquad (1)$$

Следовательно, многогранник с максимально возможной степенью вершины должен содержать по m 3-, 4- и 5-угольных граней, а также произвольное (от 0 до m) число 6-угольных граней.

Теперь надо поискать такие многогранники. Теорема Штайница о том, что любой 3-связный планарный граф представляет какой-то выпуклый многогранник, позволяет рисовать не трёхмерные изображения сложных многогранников, а плоские графы.

Многогранников класса 1 не существует по принципу Дирихле: среди целых чисел от 3 до n-1 не может быть n различных.

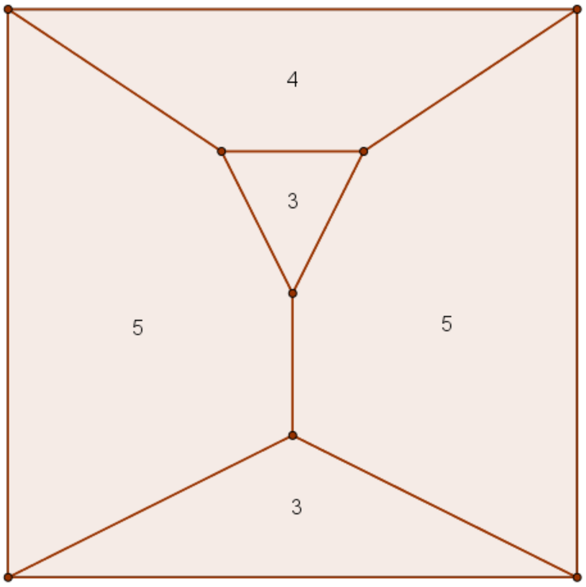


Рис. 1. m = 2, максимальная степень x = 3, вектор граней [2, 2, 2]. Треугольная призма с одной усечённой вершиной.

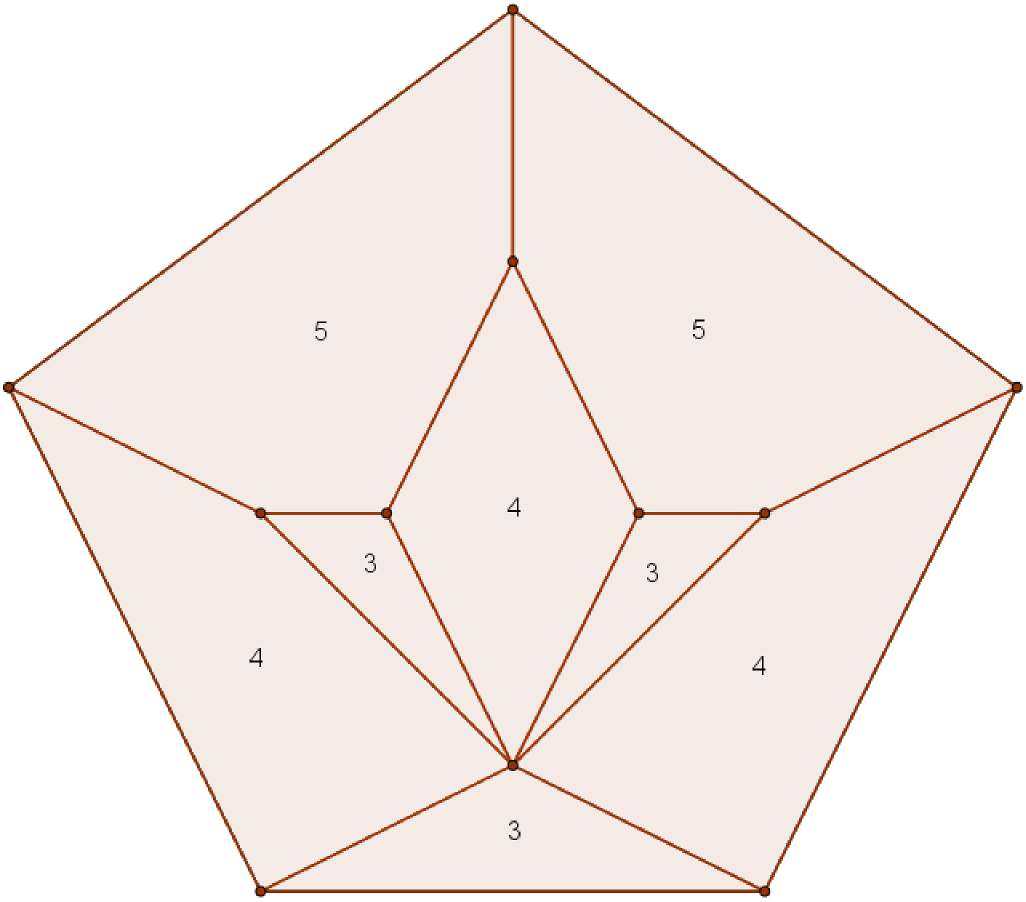


Рис. 2. m = 3, максимальная степень x = 6, вектор граней [3, 3, 3].

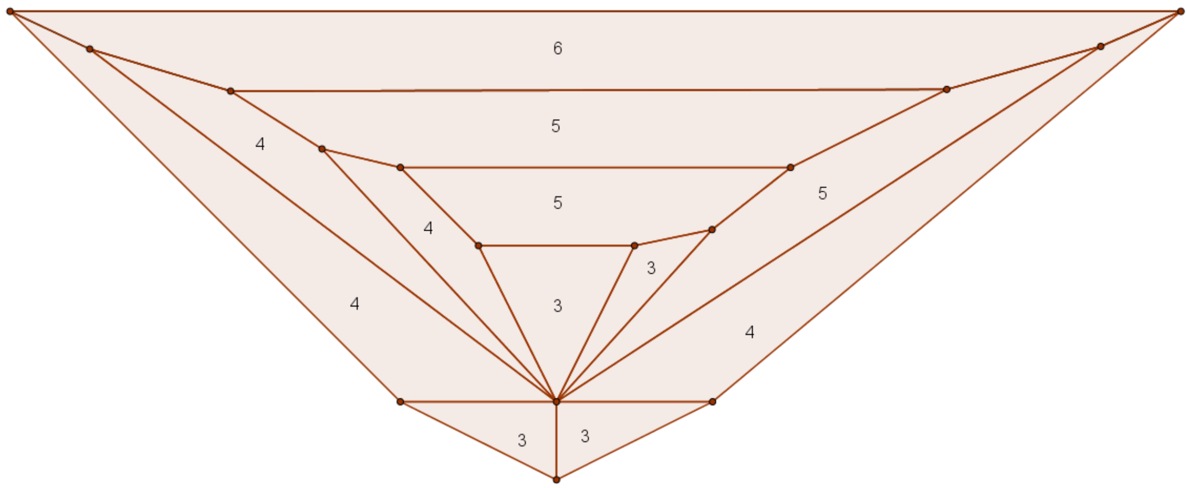


Рис. 3. m = 4, максимальная степень x = 9, вектор граней [4, 4, 4, 1].

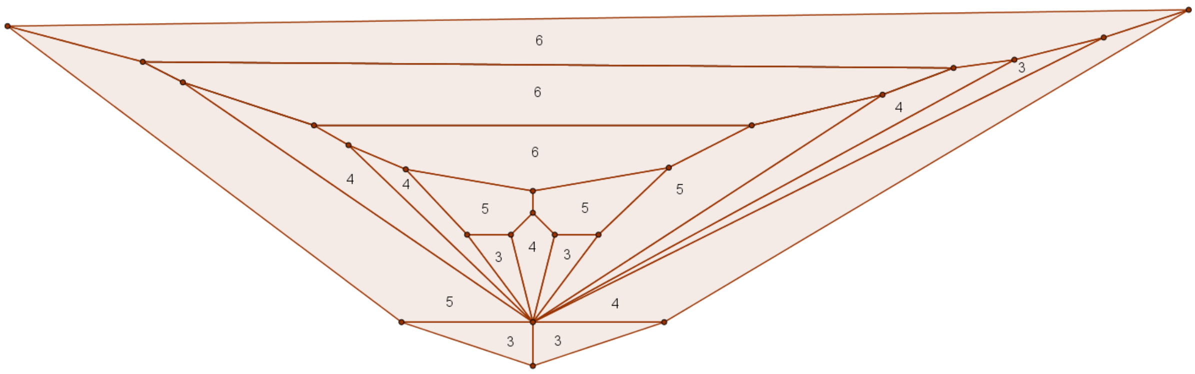


Рис. 4. m = 5, максимальная степень x = 12, вектор граней [5, 5, 5, 3].

Оценка сверху максимальной степени вершины в общем случае

Для нескольких малых значений m нам удалось построить многогранники класса m, имеющие вершину степени x = 3m-3. Возникает резонный интерес: бесконечно ли количество классов, для которых x = 3m-3 достигается?

Назовем вершину, степень которой мы пытаемся максимально увеличить, *центральной*.

Рассмотрим грани, инцидентные центральной вершине. Их стороны, не инцидентные центральной вершине, образуют замкнутую цепочку, которую будем называть *периметром*.

Центральной вершине инцидентно ровно столько граней, какова её степень. Если грань n-угольная, то она добавляет к периметру n-2 стороны. Присоединяя к периметру снаружи новые грани, мы изменяем размер периметра. Многогранник будет построен, когда периметр уменьшится до нуля. Если при этом не осталось лишних граней, то построенный многогранник – искомый. Нас сейчас не интересуют тонкости правил присоединения граней к периметру, мы пытаемся выяснить, сколько шестиугольных граней потребуется для уменьшения периметра до нуля в лучшем случае.

Заключительная (*внешняя*) грань сокращает периметр ровно на свой размер. Все остальные грани сокращают периметр на величину, меньшую размера грани. В лучшем случае n-угольная грань закрывает собой n-1 сторону периметра, выставляя наружу одну свою сторону, то есть, сокращает периметр на n-2.

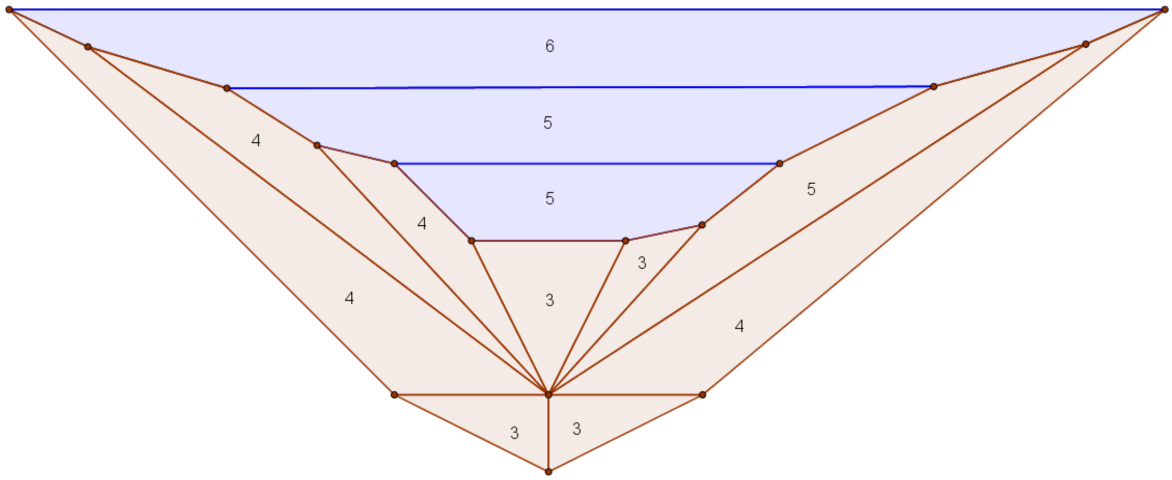


Рис. 5. Начальный периметр обозначен коричневым цветом. Каждая последующая грань старается максимально уменьшить периметр, пока тот не станет равным размеру внешней грани.

Теперь посчитаем. Если степень центральной вершины равна x = 3m-3, то начальный размер периметра будет минимальным, если взять m треугольных, m четырёхугольных и m-3 пятиугольных граней:
(3-2)m + (4-2)m + (5-2)(m-3) = 6m – 9 сторон.

Пусть осталось 3 пятиугольные грани и *y* шестиугольных. Тогда размер периметра можно уменьшить не более чем на (5-2)*3 + (6-2)y + 2 = 4y + 11. Двойка прибавляется из-за того, что какая-то одна из граней – внешняя.

Из неравенства 4y + 11 ≥ 6m – 9 получаем, что $y \geq \left\lceil \frac{3m-9}{2} \right\rceil$.

m	Начальный периметр	Ресурс	Необходимо шестиугольных граней	Максимальная степень вершины
3	9	11	0	6
4	15	15	1	9
5	21	23	3	12
6	27	27	4	15
7	33	35	6	18
8	39	39	7	21
9	45	47	9	24
10	51	51	10	27
11	57	59	12	-

Таб. 1. Минимально необходимое число шестиугольных граней.

Из таблицы 1 видно, что шестиугольных граней начинает не хватать при m = 11.

Значит, при m ≥ 11 потребуется использовать семиугольные грани. Нечётного числа нечётных граней быть не может, поэтому семиугольные грани добавляются только парами. (Возможны и другие варианты: взять одну восьмёрку, либо добавить семёрку и убрать пятёрку, но мы рассматриваем вариант наибольшего сокращения периметра.)

Каждая семиугольная грань в лучшем случае может уменьшить периметр на 5 (превратить шесть сторон в одну), но каждая используемая пара семиугольных граней уменьшает степень x центральной вершины на 1 (см. формулу (1) на стр. 1).

Если используются z пар семиугольных граней, то исходный размер периметра не меньше чем (3-2)m + (4-2)m + (5-2)(m-z-3) = 6m – 3z – 9 сторон, а уменьшить его можно не более чем на (5-2)(z+3) + (6-2)m + (7-2)2z + 2 = 4m + 13z + 11.

Из неравенства 4m + 13z + 11 ≥ 6m – 3z – 9 получаем, что $z \geq \left\lfloor \frac{m-3}{8} \right\rfloor$.

Так как количество необходимых семёрок растёт медленнее m, то ситуация, когда семёрок не хватает, наступить не может.

m	Начальный периметр	Ресурс	Необходимо шестиугольных граней	Необходимо семиугольных граней	Максимальная степень вершины
11	54	56	8	2	29
12	60	60	9	2	32
13	66	68	11	2	35
14	72	72	12	2	38
15	78	80	14	2	41
16	84	84	15	2	44
17	90	92	17	2	47
18	96	96	18	2	50
19	99	101	16	4	52
20	105	105	17	4	55
21	111	113	19	4	58
22	117	117	20	4	61
23	123	125	22	4	64
24	129	129	23	4	67
25	135	137	25	4	70
26	141	141	26	4	73
27	144	146	24	6	75

Таб. 2. Минимально необходимое число шестиугольных и семиугольных граней.

Нетрудно выписать общую формулу верхней оценки зависимости x(m):

x = 3m – 3 – z = $\left\lfloor \frac{23m-14}{8} \right\rfloor$, если m ≥ 3.

Доказательство, что найденная верхняя оценка - точная

Поскольку будут рассматриваться сложные многогранники весьма частного вида, удобнее ввести для них специальное схематическое изображение.

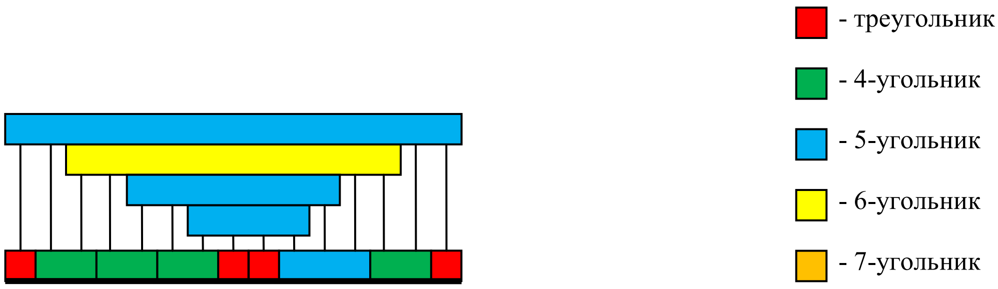


Рис. 6. m = 4, максимальная степень x = 9, вектор граней [4, 4, 4, 1]. Ср. с рис. 3, 5.

В нижнем ряду рисунка представлены грани, инцидентные центральной вершине. Жирная полоса по их нижнему краю символизирует центральную вершину (как меркаторская проекция Южного Полюса). Получившийся периметр последовательно покрывается гранями, изображёнными выше. Самая верхняя грань – внешняя, она здесь нарисована явно.

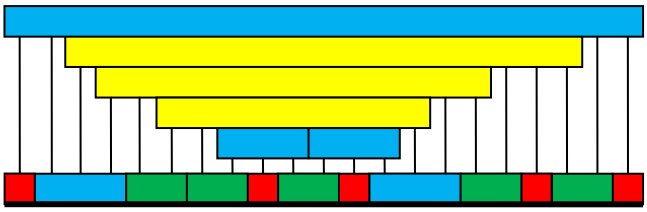
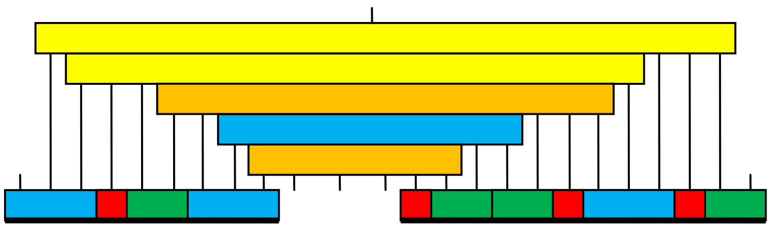


Рис. 7. m = 5, максимальная степень x = 12, вектор граней [5, 5, 5, 3]. Ср. с рис. 4.

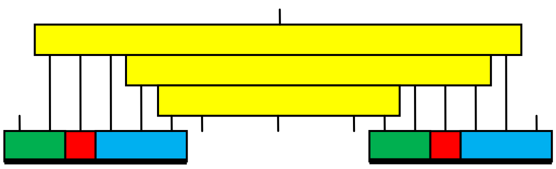
Введём в рассмотрение набор из пяти «строительных блоков».

Блок E

Блок D



Блок C



Блок B

Блок A

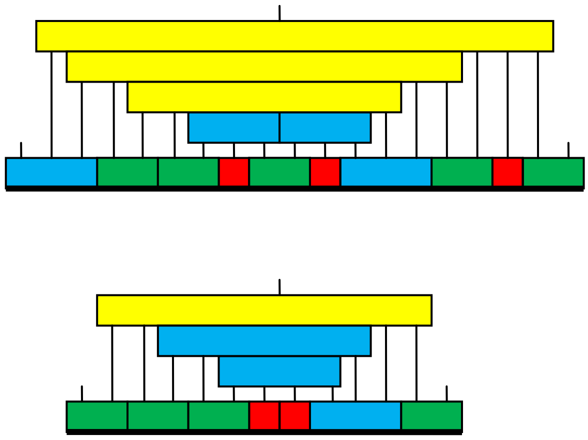


Рис. 8. Набор «строительных блоков».

Оказывается, что из этих пяти блоков можно построить «башню» для рассматриваемых в задаче многогранников любого класса, большего 3.

В основание башни закладывается блок A, если m чётно, или блок B, если m нечётно. Если обратить внимание на таб. 1, 2, то можно заметить, что, регулируя число шестиугольников, для чётных m можно сделать покрывающую способность (ресурс) равным начальному периметру, а для нечётных m остаются две лишние единицы ресурса (сторон). В блоке B два пятиугольника первого яруса вместе покрывают не 4+4=8 сторон начального периметра, а только 6, растрачивая тем самым две лишние единицы ресурса.

Требуется $\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor - 2z - 2$ блоков C и z блоков D, где z – количество пар семиугольных граней.

На вершину башни водружается блок E – пятиугольная внешняя грань с двумя треугольниками.

m	Вектор граней	Формула башни	Максимальная степень вершины
4	[4, 4, 4, 1]	AE	9
5	[5, 5, 5, 3]	BE	12
6	[6, 6, 6, 4]	ACE	15
7	[7, 7, 7, 6]	BCE	18
8	[8, 8, 8, 7]	AC_2E	21
9	[9, 9, 9, 9]	BC_2E	24
10	[10, 10, 10, 10]	AC_3E	27
11	[11, 11, 11, 8, 2]	BCDE	29
12	[12, 12, 12, 9, 2]	AC_2DE	32
13	[13, 13, 13, 11, 2]	BC_2DE	35
14	[14, 14, 14, 12, 2]	AC_3DE	38
15	[15, 15, 15, 14, 2]	BC_3DE	41
16	[16, 16, 16, 15, 2]	AC_4DE	44
17	[17, 17, 17, 17, 2]	BC_4DE	47
18	[18, 18, 18, 18, 2]	AC_5DE	50
19	[19, 19, 19, 16, 4]	BC_3D_2E	52

Таб. 3. Формулы башен для многогранников разных классов.

Примеры построения многогранников из блоков.

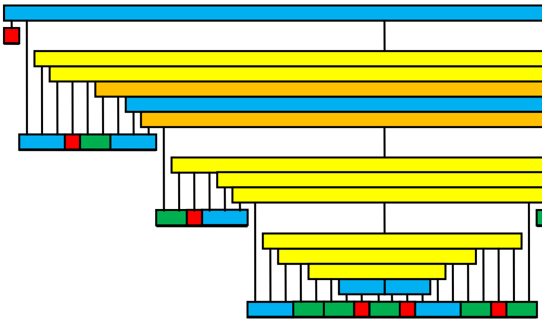


Рис. 9. m = 11, максимальная степень x = 29, вектор граней [11, 11, 11, 8, 2]. Формула BCDE.

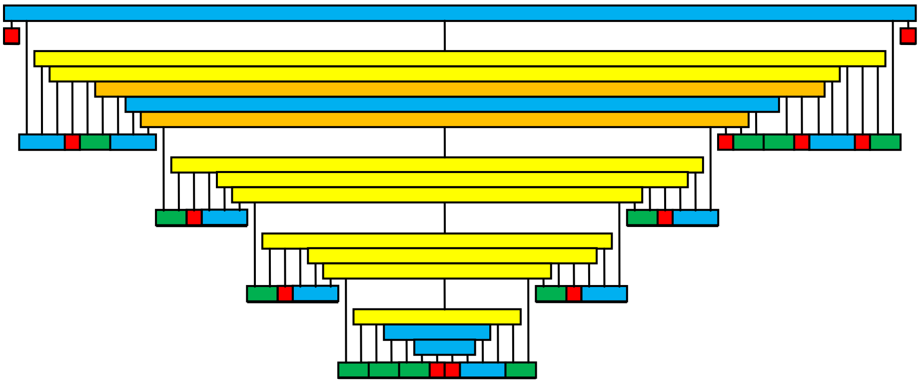


Рис. 10. m = 12, максимальная степень x = 32, вектор граней [12, 12, 12, 9, 2]. Формула AC_2DE.

Существует очень много многогранников, удовлетворяющих условиям задачи. С помощью предложенных блоков можно построить только небольшое семейство, но и в этом семействе достаточно изомеров. Во-первых, блоки C и D перестановочны, а во-вторых, каждый из блоков C и D можно отразить вокруг вертикальной оси, получив в результате другой многогранник.