

О ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ГРАФОВ

Проверка графа на гамильтоновость является одной из классических NP – полных задач. В общем случае, на сегодняшний день неизвестно, существует ли решение данной задачи за полиномиальное время. Между тем, для многих конкретных классов графов вопрос о гамильтоновости решен ([1], [2]). В настоящей работе исследуется проблема гамильтоновости одного специального класса графов, для которых известные достаточные признаки гамильтоновости не работают.

Зададим на начальном отрезке $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ряда натуральных чисел структуру графа, полагая вершины x и y из V смежными, если $|x - y| = u$ или $|x - y| = v$, где u и v – фиксированные различные натуральные числа ($u < v$). Полученный таким образом граф будем обозначать $G(u, v, n)$.

Целью данной работы является исследование графов $G(u, v, n)$ на гамильтоновость.

Основной результат

1. Если u и v взаимно простые числа разной четности, то, начиная с некоторого количества вершин n_0 , зависящего от u и v , все графы будут гамильтоновы.

2. Если u и v взаимно простые нечетные числа, то, начиная с некоторого количества вершин n_0 , зависящего от u и v , для любого четного n больше n_0 , все графы будут гамильтоновы.

Для доказательства этого утверждения докажем ряд лемм.

Ребро, инцидентное вершинам x и $x+u$, будем называть u -ребром. Аналогично вводится понятие v -ребра.

Лемма 1. При $n \geq u + v - 1$ количество ребер графа $G(u, v, n)$ равно $2n - u - v$.

Доказательство.

Очевидно, что в $G(u, v, n)$ будет $n - u$ u -ребер и $n - v$ v -ребер.

Лемма 2. При $u > 1$ граф $G(u, v, n)$ связан тогда и только тогда, когда u и v взаимно просты и $n \geq u + v - 1$.

Доказательство.

При $n < u + v - 1$ число ребер графа меньше $n - 1$ и поэтому он не может быть связан.

Пусть $(u, v) = d$. Очевидно, что при $d > 1$ вершины, принадлежащие разным классам вычетов по модулю d , лежат в разных компонентах связности графа $G(u, v, n)$.

Пусть $d = 1$ и $n \geq u + v - 1$. Обозначим $m = u + v$, тогда $(u, m) = (u, u + v) = (u, v) = 1$ и числа $u, 2u, 3u, \dots, tu$ образуют полную систему вычетов по модулю m . Заменим каждое из этих чисел его остатком от деления на m . Тогда, удалив последнее число, (равное 0) мы получим в графе $G(u, v, n)$ цепь с концами в вершинах u и v , содержащую все вершины с номерами от 1 до $u + v - 1$.

Легко видеть, что для любой вершины графа существует путь (например, из u -ребер) в некоторую из вершин данной цепи. Тем самым доказана связность графа.

Примечание. При $u = 1$ граф, очевидно, связан при любом n .

В дальнейшем всегда будем полагать, что числа u и v взаимно просты.

Лемма 3. Граф $G(u, v, u + v)$ является циклом.

Доказательство.

Заметим, что вершина $u + v$ смежна концам цепи, описанной в Лемме 2.

Лемма 4 (о «склейке»). Если графы $G(u, v, n)$ гамильтонов, то граф $G(u, v, u + v + n)$ также гамильтонов.

Доказательство.

Так как степень вершины 1 графа $G(u, v, n)$ равна 2, гамильтонов цикл этого графа обязательно содержит ребро $a = \{1, 1 + u\}$. По той же причине гамильтонов цикл графа $G(u, v, u + v)$ содержит ребро $b = \{u + 1, 2u + 1\}$.

Прибавим ко всем вершинам графа $G(u, v, n)$ по $u + v$. При этом гамильтонов цикл графа $G(u, v, n)$ перейдет в некоторый цикл графа $G(u, v, u + v + n)$, содержащий вершины с $u + v + 1$ по $u + v + n$, ребро a перейдет в ребро $a' = \{u + v + 1, 2u + v + 1\}$. Таким образом, в графе $G(u, v, u + v + n)$ есть два цикла, один из которых содержит вершины с 1 по $u + v$, а другой – вершины с $u + v + 1$ по $u + v + n$. Удалим из первого цикла u -ребро b , а из второго u -ребро a' , а вместо них добавим v -ребра $\{u + 1, u + v + 1\}$ и $\{2u + 1, 2u + v + 1\}$. В результате получим гамильтонов цикл графа $G(u, v, u + v + n)$.

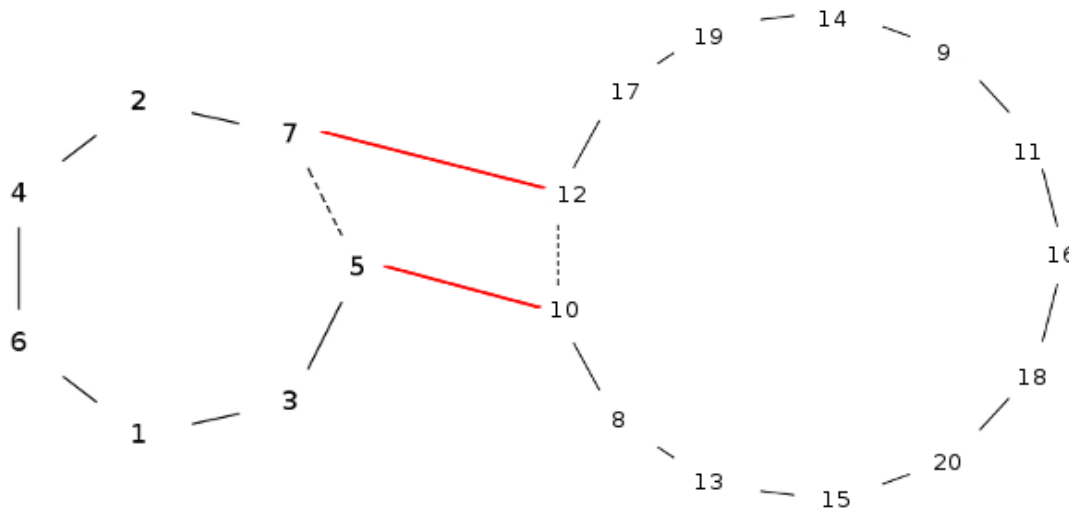


Рис. 1. Склейка графов $G(2, 5, 7)$ и $G(2, 5, 13)$

Если натуральные числа p_1 и p_2 взаимно просты, то, любое натуральное число, начиная с $(p_1 - 1)(p_2 - 1)$, может быть представлено в виде линейной комбинации чисел p_1 и p_2 с целыми неотрицательными коэффициентами ([3]). Подходящее p_1 у нас уже есть. Поэтому для доказательства основного утверждения нам осталось найти p_2 , взаимно простое с p_1 , при котором граф $G(u, v, p_2)$ будет гамильтоновым, и показать, что такие графы можно «склеивать» между собой.

Наиболее просто найти такое p_2 в случае, когда $2u \leq v$.

Лемма 5. При $2u \leq v$ граф $G(u, v, 3u + v)$ – гамильтонов.

Доказательство.

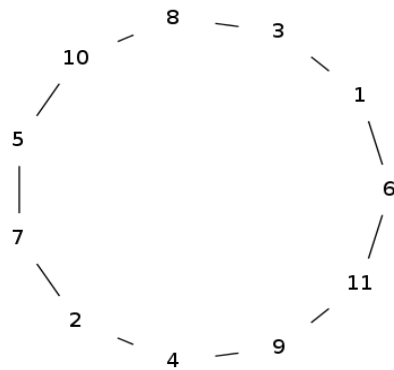
Граф $G(u, v, 3u + v)$ имеет $3u$ v -ребер и $v + 2u$ u -ребер. Удалим из него $2u$ u -ребер: $\{u + 1, 2u + 1\}$, $\{u + 2, 2u + 2\}, \dots, \{2u, 3u\}$, $\{v + 1, v + 1 + u\}$, $\{v + 2, v + 2 + u\}, \dots, \{v + u, v + 2u\}$.

Оставшийся граф (обозначим его G') имеет v u -ребер и $3u$ v -ребер. Степени всех вершин этого графа равны 2. Поэтому G' является объединением циклов.

Зададим в каждом цикле направление обхода вершин. Будем называть ребро «положительным», если вторая (при заданном направлении обхода) вершина ребра больше первой и «отрицательным» в противном случае.

Пусть цикл содержит k_1 положительных u -ребер, k_2 отрицательных u -ребер, m_1 положительных v -ребер и m_2 отрицательных v -ребер. Ясно, что суммарный баланс $(k_1 - k_2)u + (m_1 - m_2)v$ должен быть равен 0. Назовем цикл тривиальным, если $k_1 = k_2$ и $m_1 = m_2$. Поскольку среди чисел $3u$ и v есть хотя бы одно нечетное, по крайней мере, один из циклов должен быть нетривиальным, т.е. линейная комбинация чисел u и v должна обратиться ноль при ненулевых коэффициентах. Но u и v взаимно просты, поэтому и линейная комбинация не может обратиться в ноль, если коэффициент при u (который, не нарушая общности рассуждений, можно считать положительным) будет меньше v . Поэтому все v u -ребер графа G' войдут в один нетривиальный цикл. Но цикл, очевидно, не может состоять из одних только v -ребер. Поэтому и все v -ребра войдут в тот же самый цикл. Окончательно получим, что для этого цикла $k_1 = v$, $k_2 = 0$, $m_1 = u$, $m_2 = 2u$. Таким образом, граф G' является циклом и граф $G(u, v, 3u + v)$ гамильтонов.

Доказательство гамильтоновости графа $G(u, v, 3u + v + n)$ проводится аналогично доказательству леммы 4. При этом в случае, когда $3u < v$, замене на v -ребра подлежат



u -ребра $\{3u + 1, 4u + 1\}$ и $\{3u + v + 1, 4u + v + 1\}$. Если же $3u > v$, то можно заменить на v -ребра $\{u + v + 1, u + 2v + 1\}$, $\{2u + v + 1, 2u + 2v + 1\}$ u -ребра $\{u + v + 1, 2u + v + 1\}$ и $\{u + 2v + 1, 2u + 2v + 1\}$. Наконец, если $3u = v$, то в силу взаимной простоты u и v , $u = 1$ и $v = 3$. В этом случае в графе $G(1, 3, 6)$, кроме гамильтонова цикла, существование которого обосновано в Лемме 4, есть еще один гамильтонов цикл: $[1, 2, 3, 6, 5, 4]$. Тогда замене на 3-ребра подлежат ребро $\{4, 5\}$ этого цикла в исходном графе $G(1, 3, 6)$ и ребро $\{7, 8\}$ в «смещенном» графе $G(1, 3, n)$.

Рис. 2. Граф $G(2, 5, 11)$

Лемма 6. При $1.5u \leq v \leq 2u$ граф $G(u, v, u + 3v)$ – гамильтонов.

Доказательство.

Обозначим $s = 2u - v$.

Объявляем «неприкосновенными» ребра инцидентные вершинам степени 2 и s ребер $\{u+v, 2u+v\}$, $\{u+v-1, 2u+v-1\}$, ..., $\{2v-u+1, 2v+1\}$ (это «минус- u -ребра»).

Удалим оставшиеся u -ребра и $2s$ v -ребер: s , начиная с $\{v+1, 2v+1\}$ и с симметричных им, заканчивая ребром $\{u+v, u+2v\}$.

После этого все вершины будут иметь степень 2. При этом останется $2u+s = v+2s$ u -ребер и $4v-3u$ v -ребер. По крайней мере, одно из этих чисел нечетно. Но суммарный баланс положительных и отрицательных ребер при обходе цикла должен быть нулевым. Поэтому u -ребра не могут быть уравновешены только u -ребрами. В силу взаимной простоты u и v u -баланс должен быть кратен v . Поскольку $2s < v$, единственная (с точностью до выбора направления обхода) возможность получить такой баланс – взять $v+s$ положительных и s отрицательных ребер. То есть, все u -ребра входят в один цикл. Но цикл не может состоять из одних v -ребер. Поэтому все v -ребра также входят в единственный цикл, который, следовательно, будет гамильтоновым.

Для присоединения данного цикла «снизу» к другому гамильтонову циклу достаточно удалить ребро $\{2v+u+1, 2v+2u+1\}$ и «младшее» u -ребро другого цикла, заменив их v -ребрами.

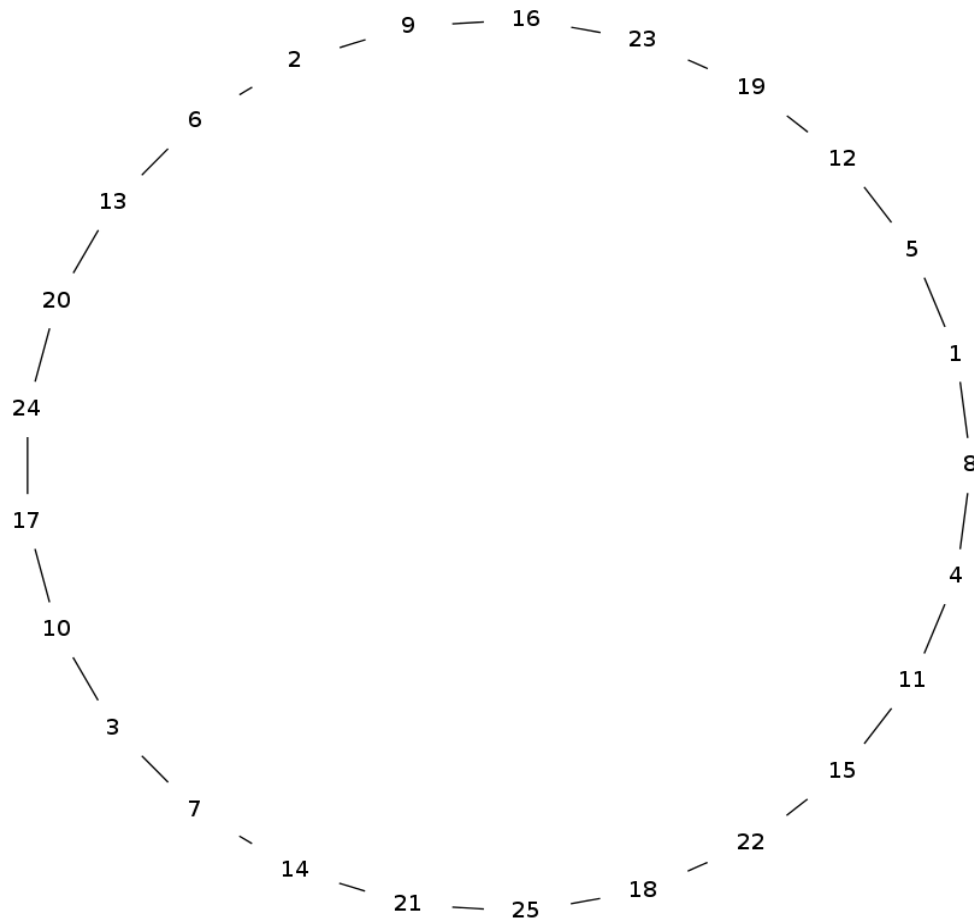


Рис. 3. Граф $G(4, 7, 25)$

Наиболее сложен случай, когда u и v различаются менее чем в полтора раза. Для этого случая мы опишем получение гамильтонова цикла не посредством удаления «лишних» ребер, а путем склеивания циклов и отдельных вершин.

Обозначим $w = u+v$, $d = v-u$. Разделим u на d с остатком $u = ad+e$.

Лемма 7. Если a – нечетно или $d = 1$, то граф $G(u, v, (a+1)w+d)$ гамильтонов.

Используем d отдельных вершин $w+1, \dots, w+d$ и $a+1$ экземпляров графа $G(u, v, w)$, заданных на отрезках: $1, \dots, w$; $w+d+1, \dots, 2w+d$; $\dots$; $aw+d+1, \dots, (a+1)w+d$.

1. Для i от 1 до d :
удаляем все ребра $\{u+i, 2u+i\}$ и $\{3u+i, 4u+i\}$;
добавляем ребра $\{u+i, w+i\}$, $\{w+i, w+v+i\}$ и $\{2u+i, 3u+i\}$.
2. Для k от 3 до a :
для i от 1 до d :
удаляем ребра $\{(k-1)w-u+i, (k-1)w+i\}$ и $\{(2k-1)u+i, 2ku+i\}$;
добавляем ребра $\{(k-1)w+i, kw-u+i\}$ и $\{2(k-1)u+i, (2k-1)u+i\}$.
3. Для i от 1 до d :
удаляем ребра $\{aw-u+i, aw+i\}$ и $\{aw+d+i, aw+v+i\}$;
добавляем ребра $\{aw+i, aw+v+i\}$;

если $i \leq e$ добавляем ребра $\{aw + d - u + i, aw + d + i\}$,
иначе добавляем ребра $\{aw - u + i, aw + d + i\}$.

Заметим, что u -ребра $\{1, u + 1\}$ и $\{aw + u + d + 1, aw + 2u + d + 1\}$, необходимые для склеивания циклов, остались нетронутыми.

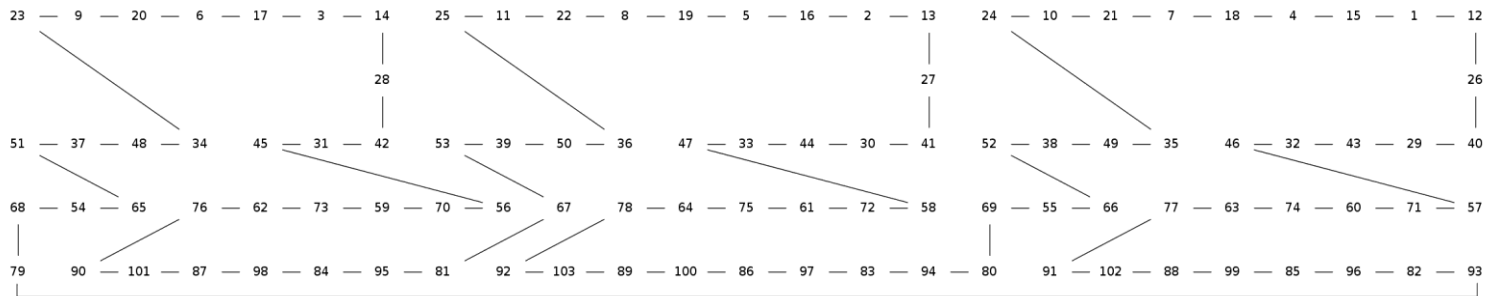


Рис.4. Граф $G(11, 14, 103)$

Лемма 8. Если a – четно, то граф $G(u, v, (a+2)w+d)$ гамильтонов.

Выполнив в точности те же шаги, которые описаны в лемме 7, получим d отдельных циклов. Для того, чтобы объединить их в один (при $d > 1$) нам потребуется еще один экземпляр графа $G(u, v, w)$ и следующие шаги:

Для $i = 1..d$

1. Разорвать ребро $\{i+u+aw+d, i+2u+aw+d\}$ и ребро $\{i+(a+1)w+d, i+u+(a+1)w+d\}$.
2. Соединить вершину $i+2u+aw+d$ с вершиной $1+u+(a+1)w+d$.
3. Соединить вершину $i+u+aw+d$ с вершиной $i+(a+1)w+d$.

Отметим, что и в этом случае сохраняются ребра, необходимые для склейки.

Итак, в случае, когда $v < 1.5u$ в качестве p_2 годится число $(a+2)w+d$ четных a и $(a+1)w+d$ – при нечетных. Отметим, что в случае $1.5u \leq v \leq 2u$ $u+3v = 2u+2v+v-u = (a+1)w+d$. Таким образом, лемма 6 является частным случаем леммы 7. (Мы сохранили ее в качестве самостоятельного утверждения, поскольку она была доказана раньше и послужила основой для дальнейших рассуждений.)

Если числа u и v имеют разную четность, то p_1 и p_2 взаимно просты. Таким образом доказан первый пункт основной теоремы.

Если же u и v оба нечетны, то наибольший общий делитель p_1 и p_2 равен 2. Поэтому гамильтоновыми будут все графы $G(u, v, n)$, начиная с некоторого n , лишь для четных значений n . Что и утверждалось во втором пункте основной теоремы. Отметим, что при нечетных u и v граф $G(u, v, n)$ двудолен и, следовательно, не может быть гамильтоновым при нечетных n .

В заключение отметим, что значение n , начиная с которого все графы $G(u, v, n)$ взаимно простых u и v разной четности будут гамильтоновы, как правило меньше $(p_1-1)(p_2-1)$. Это объясняется тем, что гамильтоновы циклы в графах $G(u, v, n)$ могут возникать не только в результате «склейки» графов, описанных в работе.

Литература

1. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
2. Дистель Р. Теория графов. – Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2002.
3. Coin problem [раздел он-лайн энциклопедии MathWorld.Wolfram].
URL: <http://mathworld.wolfram.com/CoinProblem.html> (Дата обращения 20.12.2013)