**Наибольшее возможное значение A(n, 1)**

Очевидно, что A(n, 1) ≤ 3, и что при последовательности из трёх членов второй имеет нечётное количество делителей и является квадратом. Последовательности A(2, 1), A(4, 1) и A(6, 1) имеют только по два члена, в чём несложно убедиться. Последовательность A(8, 1) длиной 3 строится с помощью компьютерного перебора. Высока вероятность найти число вида x2+1, имеющее 10 делителей, если оно делится на 625. Учитывая это, находим числа

27285093123 = 3 \* 55061 \* 165181

27285093124 = 22 \* 825912

27285093125 = 54 \* 43656149

Ответ: Наибольшее возможное значение A(n,1) – 3

**Наибольшее возможное значение A(n, 3)**

Как и в предыдущей задаче, A(n, 3) ≤ 3. Несложно построить последовательность A(12, 3) длиной 3, если третий член делится на 58

322633405633169140623 = 32 \* 1995777659 \* 17961998933

322633405633169140624 = 24 \* 44904997332

322633405633169140625 = 58 \* 825941518420913

Ответ: Наибольшее возможное значение A(n,3) – 3

**A(2, 2) - ?**

Последовательные натуральные числа должны иметь 2, 4, 6, … делителей. Первое число обязано быть простым. Следующее за ним – произведение двух простых, одно из них двойка. Далее два варианта, либо число вида 3p2, либо число вида 9p, подходит только второе, в чём мы убедимся далее. Следующее число обязано делится на степень двойки и должно иметь 8 делителей, поэтому подойдёт только третья степень, получается число вида 8p. Сравнение 3p2≡7 (mod 8) не имеет решений, поэтому предыдущее число не может иметь вид 3p2.

Следующее число должно иметь 10 делителей, поэтому оно имеет вид 5p4 или 625p. Сравнение 5p4≡1(mod 8) не имеет решений, значит подходит второй вариант. Следующее число должно иметь вид 6p2, но сравнение 6p2≡2(mod 8) также не имеет решений. Получаем последовательность чисел

p1, 2p2, 9p3, 8p4, 625p5

Отсюда следует, что A(2, 2) ≤ 5. Теперь нужно построить данную последовательность чисел. По китайской теореме об остатках находим: p1≡25621(mod 45000). При помощи компьютерного перебора получается найти нужные числа.

1524085621

1524085622 = 2 \* 762042811

1524085623 = 32 \* 169342847

1524085624 = 23 \* 190510703

1524085625 = 54 \* 2438537

Ответ: A(2, 2) = 5

**A(4, 2) - ?**

Из предыдущего примера можно взять последовательность длиной 4, начиная со второго члена, поэтому A(4, 2) ≥ 4.

Теперь попытаемся построить последовательность длиной больше 4. Первый член – произведение двух простых чисел. Если рассмотреть число вида 2p, то получим результат предыдущей задачи. Если рассмотреть число вида 3p, то получится, что четвёртый член последовательности равен 162, приходим к противоречию. Рассмотрев число 5p, получим, что четвёртый член последовательности – это число вида 2p4, но сравнение 2x4≡3 (mod 5) не имеет решений. Все эти случаи дают лишь последовательности длиной 3.

Рассмотрим в качестве первого члена число вида pq. Следующее число либо вида 4p, тогда получается, что третий член делится на три, а четвёртый член – число вида 2p4, а сравнение 2x4≡1(mod 3) не имеет решений; либо вида 2p2. Тогда четвёртый член получается вида 16p, но сравнение 2x2≡14 (mod 16) решений не имеет. Отсюда получается, что самый оптимальный вариант для первого члена – число вида 2p, и это приводит к последовательности длиной 4 из предыдущего примера, о которой написано в начале.

Ответ: A(4, 2) = 4

**A(4, 2) - ?**

Первое число последовательности – произведение двух простых чисел. Рассмотрим отдельно два случая: когда первый член последовательности – число вида 2p и нечётное число вида pq.

1. Первое число вида 2p, имеющее 4 делителя. Третий член имеет 8 делителей и делится на степень двойки, значит, может иметь вид только 8p. Эти числа не делятся на 3, значит делится на 3 число, стоящее между ними. Оно имеет 6 делителей, соответственно, имеет вид 3p2 или 9p. Первый случай невозможен, так как 3x2 ≡ 7 (mod 8) не имеет решений.

Мы получили такую последовательность: 2p1, 9p2, 8p3, … Рассмотрим пятый член последовательности. Он имеет 12 делителей, а так же делится на первую степень двойки и тройки. Отсюда следует, что он имеет вид 6p2, но это невозможно, потому что не имеет решений сравнение 6x2 ≡ 2 (mod 8).

1. Первое число последовательности вида pq. Следующее число обязано делиться на 2 и иметь 6 делителей, поэтому оно имеет вид 2p2 или 4p. В первом случае четвёртый член последовательности делится на степень двойки, т.е. на 16, а сравнение 2x2 ≡ 14 (mod 16) не имеет решений. Во втором случае четвёртый член делится на первую степень двойки и имеет вид 2p4. Второй и четвёртый член не делятся на 3, значит, третий делится, но сравнение 2x4 ≡ 1 (mod 3) не имеет решений. Противоречие.

Отсюда следует, что максимальная длина искомой последовательности – 4. И нужная последовательность уже получена при рассмотрении A(2, 2).

Ответ: A(4, 2) = 4

**A(n, 2) ≥ 8**

Для начала отметим, что длинные последовательности с разностью прогрессии 2 нужно строить таким образом, чтобы чётные числа в этой последовательности имели количество делителей, кратное 4. Действительно, если чётные числа будут иметь 4k+2 делителей, то, очевидно, максимальная длина такой последовательности – 7. Последовательность будет такого вида:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| τ(m) mod 4 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| m |  | кратно 4 |  | 2x2 |  | кратно 4 |  |

Если предположить, что длина такой последовательности больше 7, то получим несколько удвоенных квадратов с разностью 4, что невозможно.

Теперь построим последовательность. Пусть начальный член равен 6. Укажем для каждого числа его вид, добавляя дополнительные условия делимости на некоторые простые множители, пытаясь сделать это так, чтобы числа были как можно меньше, и поиск занимал меньше времени.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| τ(m) | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| m | 52p | 2\*3p | 74p | 22pq | 36p | 2\*5pq | 112\*132p | 24\*3p |

На компьютере удаётся найти числа, соответствующие этому набору. Следовательно, при n = 6 неравенство A(n, 2) ≥ 8 выполняется. Знак равенства поставить нельзя, потому что не доказано, что больше быть не может. Наоборот, наиболее вероятно, что может, ведь, из предположения справедливости гипотезы Диксона можно, основываясь на таком наборе, доказать, что существует последовательность из 10 чисел. Но, к сожалению, это пока что лишь гипотеза.

Ниже приводится построенная последовательность.

42121593968048969225 = 52 \* 1684863758721958769

42121593968048969226 = 2 \* 3 \* 7020265661341494871

42121593968048969227 = 74 \* 17543354422344427

42121593968048969228 = 22 \* 3531509 \* 2981841046423

42121593968048969229 = 36 \* 57779964290876501

42121593968048969230 = 2 \* 5\* 557 \* 7562225128913639

42121593968048969231 = 112 \* 132 \* 2059836371854319

42121593968048969232 = 24 \* 3 \* 877533207667686859