Олег Полубасов   12.05.2021 г.

==============
MM270 (16 баллов)
Решения принимаются до 24:00 msk 22.05.2021

Вектором граней выпуклого многогранника P назовем набор $[f_3, f_4, \ldots, f_s]$, где f_i – количество i-угольных граней P, а s - наибольшее число сторон грани. Будем говорить, что P относится к классу m, если $\max(f_i)=m$.

Найти наибольшее возможное количество граней многогранника класса m.
===

Обозначим через F количество граней, через V – количество вершин, через E – количество рёбер многогранника.

Представим F в виде F = tm + u, где $0 \le u < m$.
Тогда $2E = \sum_{i=3}^{s} if_i \ge \sum_{i=3}^{t+2} m + (t+3)d = \frac{(tm+2m+2u)(t+3)}{2} - 3m.$

По теореме Эйлера: $E \le 3F - 6$, а значит,
$(tm + 2m + 2u)(t + 3) - 6m \le 4E \le 12tm + 12u - 24$,
$mt^2 - (7m - 2u)t - 6u + 24 \le 0.$ (1)

Дискриминант $D = m(49m - 96) - 4u(m - u)$.
Так как $m > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Чтобы выполнялось $D \ge 0$, необходимо $49m \ge 96$, то есть, $m \ge 2$.

$$F = tm + u \le \frac{7m + \sqrt{49m^2 - 96m - 4u(m-d)}}{2} < \frac{7m + 7m}{2} = 7m. \qquad (2)$$

Если m = 2, то $F = tm + u \le \frac{14 + \sqrt{4 - 4u(2-u)}}{2} \le \frac{14+2}{2} = 8.$

Если m = 3, то F$= tm + u \le \frac{21 + \sqrt{153 - 4u(3-u)}}{2} < \frac{21+13}{2} = 17$. Причём число граней с нечётным числом сторон должно быть чётным.

Из (2) следует, что t < 7. Положив в (1) t = 6, получим, что $u \le m - 4$. Следовательно, при $m \ge 4$: $F \le 7m - 4$.

m	max F	t	u	s	Вектор граней
2	8	4	0	6	[2, 2, 2, 2]
3	16	5	1	9	[3, 3, 3, 3, 3, 0, 1]
4	24	6	0	8	[4, 4, 4, 4, 4, 4]
> 4	7m - 4	6	m-4	9	[m, m, m, m, m, m, m-4]

Осталось показать, что искомые многогранники существуют.

При m = 2 есть два неизоморфных многогранника.

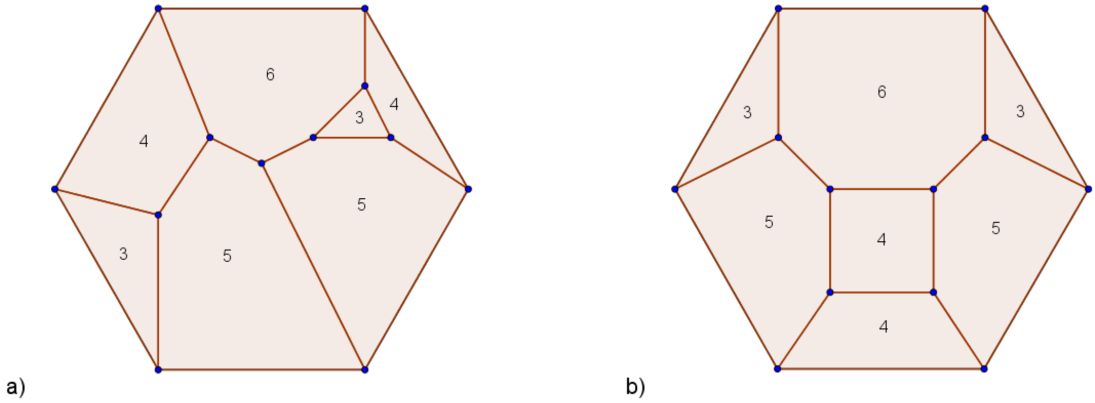

Рис 1. Многогранники с вектором граней [2, 2, 2, 2], F = 8.

При m = 3 многогранников много. Симметричный красавец представлен на рис. 2.

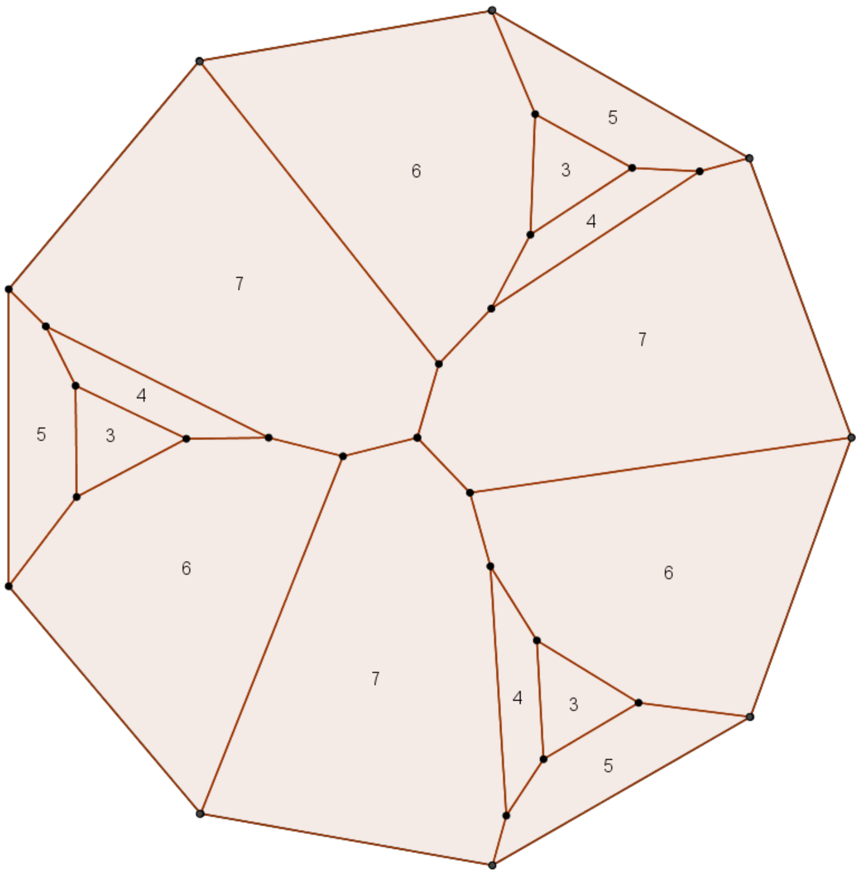

Рис 2. Многогранник с вектором граней [3, 3, 3, 3, 3, 0, 1], F = 16.

Рассмотрим трёхгранный угол на рис. 3. Трижды отсекая от вершины по треугольной пирамидке, можно добиться, чтобы появились новые грани размером 3, 4 и 5, а три грани, ранее сходящиеся в этой вершине, увеличили свою степень на 1, 2 и 3 соответственно.

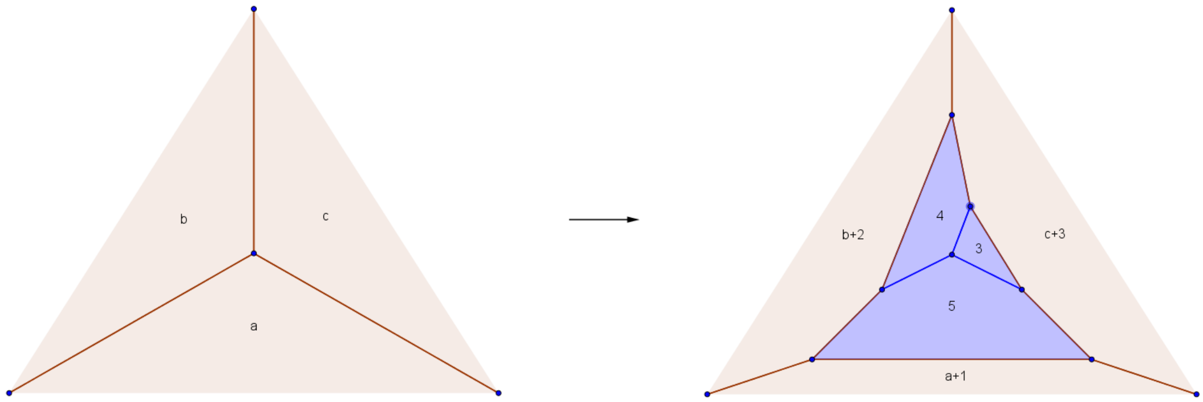

Рис 3. Преобразование 1.

Додекаэдр имеет 12 пятиугольных граней. Можно выбрать 4 вершины, попарно не имеющие общих граней (рис. 4). Применив к каждой из этих вершин преобразование 1, получим по 4 грани каждого из размеров: 3, 4, 5, 6, 7 и 8 (рис. 5).

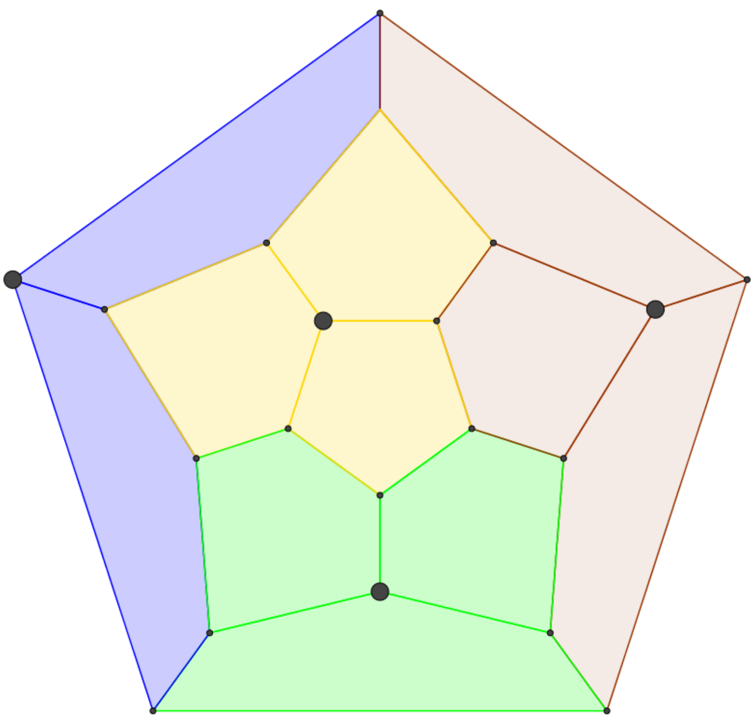

Рис 4. Додекаэдр.

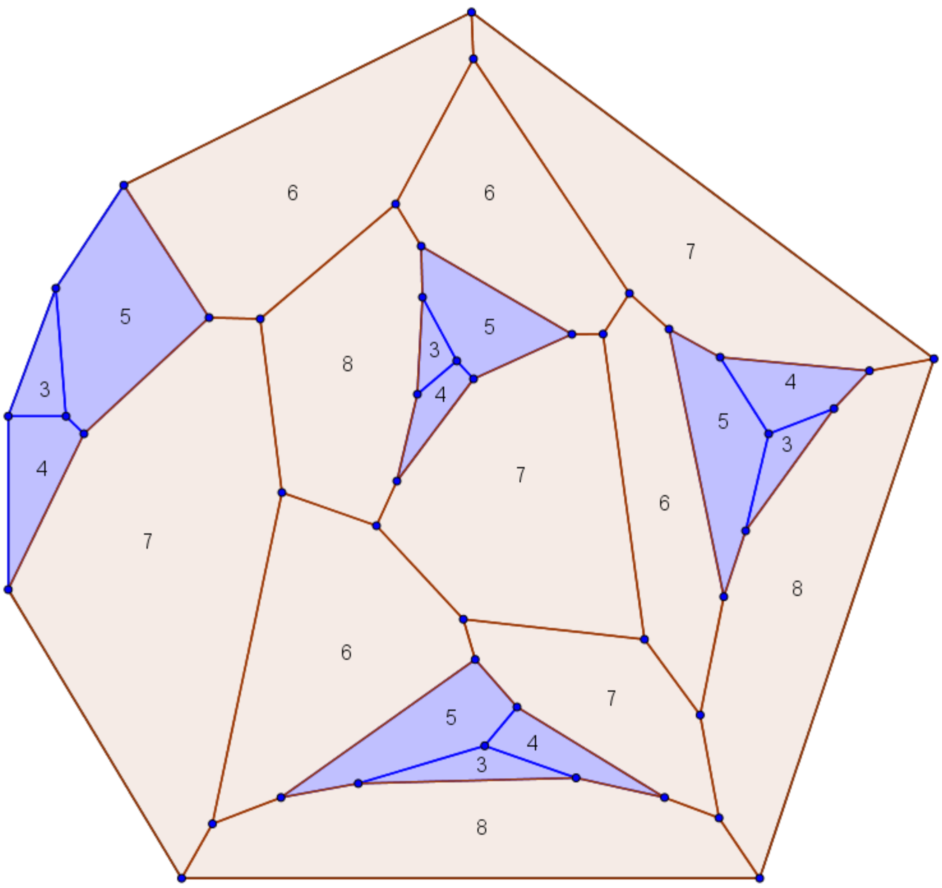

Рис 5. Многогранник с вектором граней [4, 4, 4, 4, 4, 4], F = 24.

Многогранник на рис. 5 имеет 4 трёхгранных угла, образованных гранями размеров 3, 4 и 5. Преобразование 2 (рис. 6) превращает такой угол в набор граней, в котором, по сравнению с исходным набором, добавились грани размеров 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, то есть, вектор граней из [m, m, m, m, m, m, m-4] превратился в [m+1, m+1, m+1, m+1, m+1, m+1, m+1-4].

В новом наборе есть два трёхгранных угла, образованных гранями размеров 3, 4 и 5, поэтому преобразование 2 можно последовательно применять неограниченное число раз.

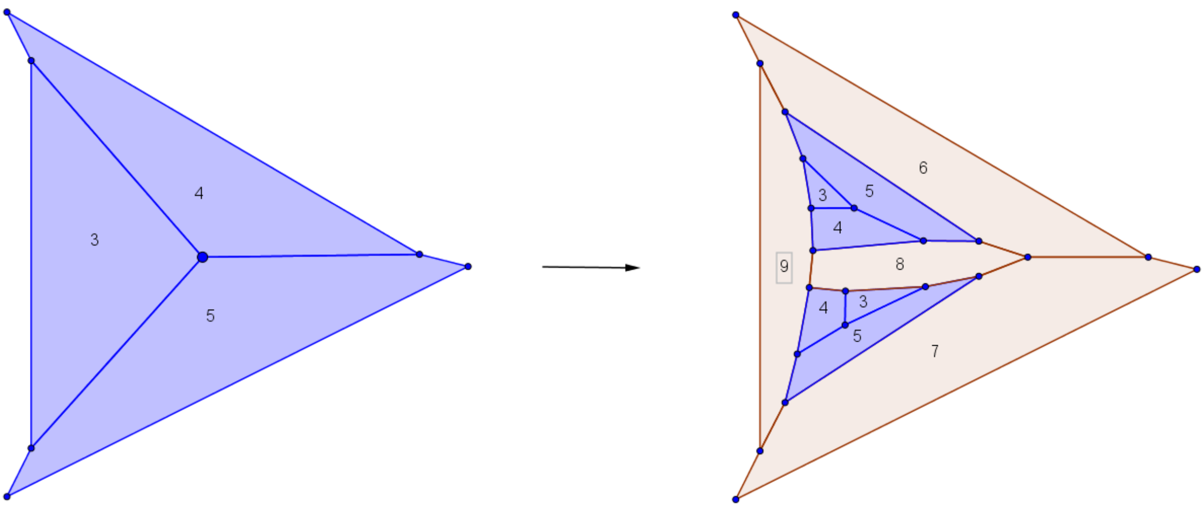

Рис 6. Преобразование 2.

Ответ. Наибольшее возможное количество граней многогранника класса m равно 7m – 4.

А что если решить такие задачи?

- Найти наибольшее возможное количество вершин многогранника класса m.
- Найти наибольшее возможное количество рёбер многогранника класса m.

По теореме Эйлера: $E \leq 3F - 6$, $V = E - F + 2 \leq 2F - 4$.

Оказывается, что найденные выше многогранники класса m, максимизирующие количество граней, одновременно максимизируют также и количество вершин, и количество рёбер.

m	F	V	E	s	Вектор граней
2	8	12	18	6	[2, 2, 2, 2]
3	16	28	42	9	[3, 3, 3, 3, 3, 0, 1]
4	24	44	66	8	[4, 4, 4, 4, 4, 4]
> 4	7m - 4	14m-12	21m-18	9	[m, m, m, m, m, m, m-4]