Классификация выпуклых многоугольников

В работе предложено несколько подходов к классификации выпуклых многоугольников с фиксированным числом сторон. В основе всех подходов лежат разбиение многоугольника его диагоналями и свойства графов естественным образом связанных с многоугольниками. Выявлена логическая зависимость между всеми предложенными классификациями. Определено количество классов для многоугольников с небольшим числом сторон.

Ординарный многоугольник *- никакие три диагонали не пересекаются в одной точке внутри многоугольника.*
В противном случае - ***многоугольник особенный****.*
Полюс порядка к *- точка внутри особенного многоугольника, в которой пересекаются k+2 диагоналей.*
Порядок полюса не может быть больше $m = \lfloor n/2 \rfloor - 2$.
s_k *- количество полюсов порядка k.*
$\chi = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ *– характеристический вектор многоугольника.*
Структурный граф многоугольника G=<V,E>:
V – вершины и точки пересечения диагоналей исходного многоугольника;
E – стороны и отрезки, на которые разбиваются диагонали (рис. 1).
Двойственный граф многоугольника D=<F,E>:
F – части, на которые разбивается исходный многоугольник диагоналями + внешняя грань (рис. 2.1).
Внутренний граф многоугольника *- граф, получаемый удалением у двойственного графа вершины, соответствующей внешней грани (рис. 2.2).*

Равнопересеченные n-угольники - выпуклые n-угольники, структурные графы которых имеют поровну вершин.
Равнореберные n-угольники - выпуклые n-угольники, структурные (а значит и двойственные) графы которых имеют поровну ребер.
Равногранные n-угольники - выпуклые n-угольники, двойственные графы которых имеют поровну вершин (а структурные – поровну граней в плоской укладке.
Изопараметрические n-угольники - выпуклые n-угольники, у которых совпадают любые две (а значит, в силу соотношения Эйлера, и все три) рассмотренные выше характеристики.
Мультимножество степеней вершин структурного графа выпуклого многоугольника определено его характеристическим вектором.
Изополярные n-угольники– выпуклые n-угольники, характеристические векторы которых равны.
Однотипные n-угольники – выпуклые n-угольники равным мультимножеством степеней вершин их двойственных графов. В разбиении однотипных многоугольников диагоналями присутствует поровну треугольников, поровну четырехугольников и т.д.
Геометрически двойственные графы изоморфных связных планарных графов могут быть не изоморфны. В интересующем нас случае такая ситуация невозможна.
Два выпуклых многоугольника ***изотопны***, если изоморфны их структурные (двойственные) графы.
Каждое из рассмотренных отношений - эквивалентность на множестве выпуклых n-угольников.
Каждая из классификаций приводит к разбиению выпуклых n-угольников на конечное число классов при каждом конкретном значении n.
$n \le 5$ *- все классификации тривиальны.*
n = 6 - два класса: ординарные; особенные.
Нами найдены числа классов для каждой из рассмотренных классификаций при n=7 и n=8. Исключениями являются числа классов изотопных и однотипных восьмиугольников.
Начиная с n = 9, любые два из введенных отношений приводят к различным разбиениям.

Число вершин структурного графа ординарного многоугольника зависит только от n и подсчитывается по формуле:

$$v_0(n) = n + C_n^4 = n(n+1)(n^2 - 7n + 18)/24$$

Число вершин структурного графа многоугольника с характеристическим вектором χ *вычисляется по формуле:*

$$v(n,\chi) = v_0(n) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k k(k+3)$$

Число ребер структурного (а значит, и двойственного) графа ординарного n-угольника:

$$e_0(n) = 2C_n^4 + n(n-3)/2 + n = n(n-1)(n^2 - 5n + 12)/12$$

Формула для количества ребер структурного (дуального) графа выпуклого многоугольника с характеристическим вектором χ*:*

$$e(n,\chi) = e_0(n) - \sum_{k=1}^{m} s_k k(k+2)$$

Формула для подсчета числа вершин внутреннего графа ординарного n-угольника получается применением соотношения Эйлера для плоской укладки планарного графа:

$$f_0(n) = 1 + e_0(n) - v_0(n) = (n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)/24$$

Формула для числа вершин внутреннего графа, n-угольника с характеристическим вектором χ*:*

$$f(n,\chi) = f_0(n) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k k(k+1)$$

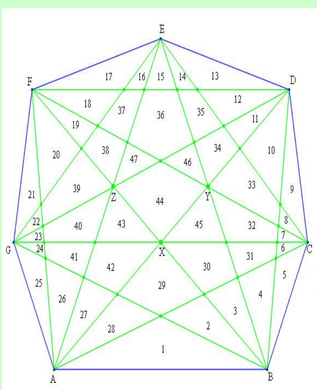
Рис. 1

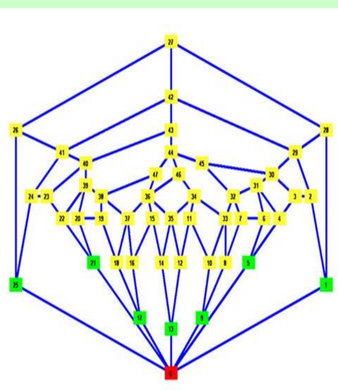
Рис. 2.1

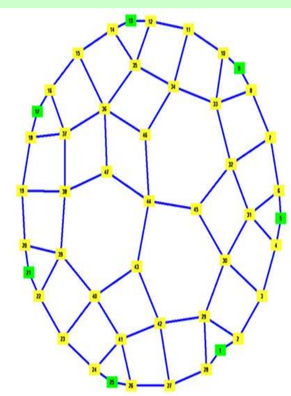
Рис. 2.2

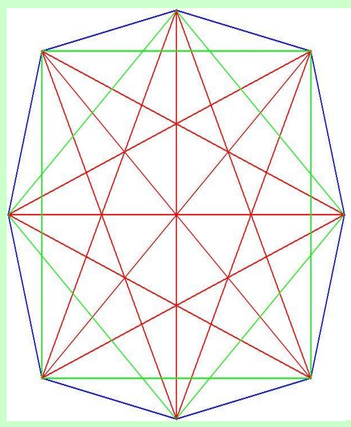
Рис. 3

Ниже приведены примеры пар многоугольников, позволяющие заключить, что не существует попарных зависимостей между предложенными нами классификациями, отличных от тех, что представлены на рисунке 4. Красным цветом на рисунках, построенных с помощью этой программы, выделены диагонали, участвующие в формировании полюсов.

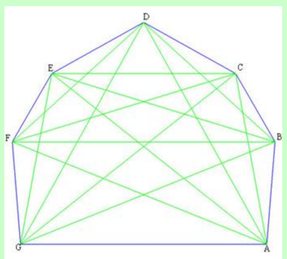
Рис. 5.1

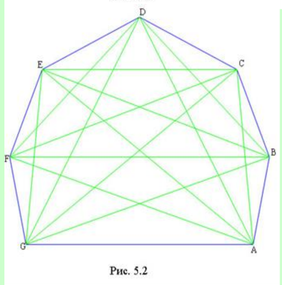
Рис. 5.2

Семиугольники однотипны и изополярны, но не изотопны.

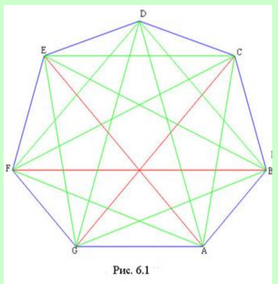
Рис. 6.1

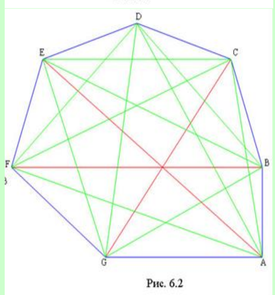
Рис. 6.2

Пример семиугольников изополярных, но не однотипных.

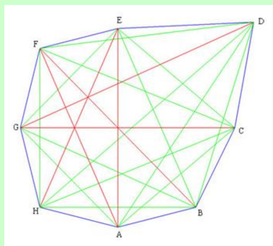
Рис. 7.1

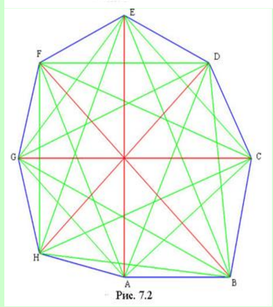
Рис. 7.2

Равногранны, но при этом не являются, ни равнореберными, ни равнопересеченными характеристические векторы соответственно (3, 0) и (0, 1).

Схема логической зависимости между классификациями.

Рис. 4.

Отсутствие попарных зависимостей не означает отсутствие зависимостей вообще.

Например если многоугольники равнопересеченные и равногранные, то они и равнорёберны.

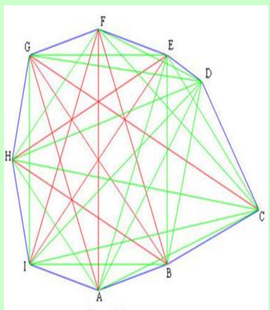
Рис. 8.1

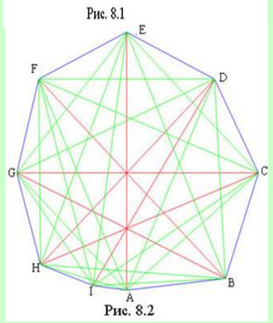
Рис. 8.2

Данные девятиугольники являются равнопересеченными, но не являются, ни равнореберными, ни равногранными и имеют характеристические векторы (5, 0) и (0, 2) соответственно.

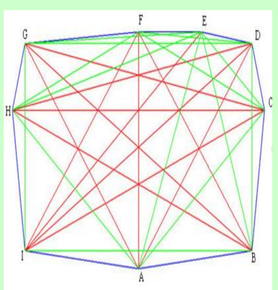
Рис. 9.1

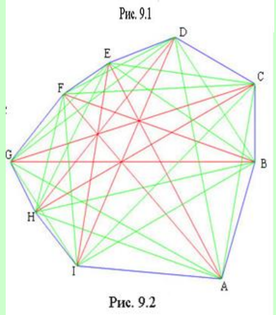
Рис. 9.2

Равнореберные, но не равнопересеченые и не равногранные девятиугольники.

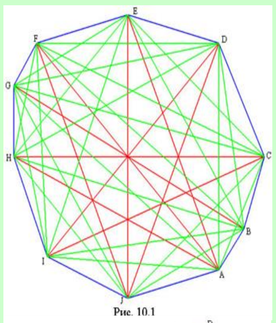
Рис. 10.1

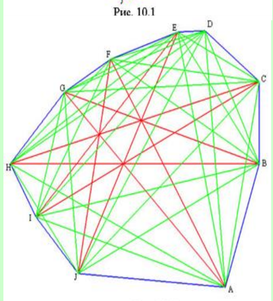
Рис. 10.2

Пример однотипных (а значит, и изопараметрических), но не изополярных многоугольников.

В таблице 1 для каждой из рассмотренных нами классификаций приведены числа классов, на которые разбиваются выпуклые n-угольники для небольших значений n. Исключениями являются числа классов изотопных и однотипных восьмиугольников, для которых подсчет числа классов представляется чрезвычайно трудной задачей.

Таблица 1

Число сторон	Число классов						
	Изотопных	Однотипных	изополярных	Изо параметрических	Равно пересеченных	Равно реберных	равногранных
	выпуклых многоугольников						
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	2	2	2	2	2	2	2
7	15	11	4	4	4	4	4
8	?	?	17	17	17	17	10