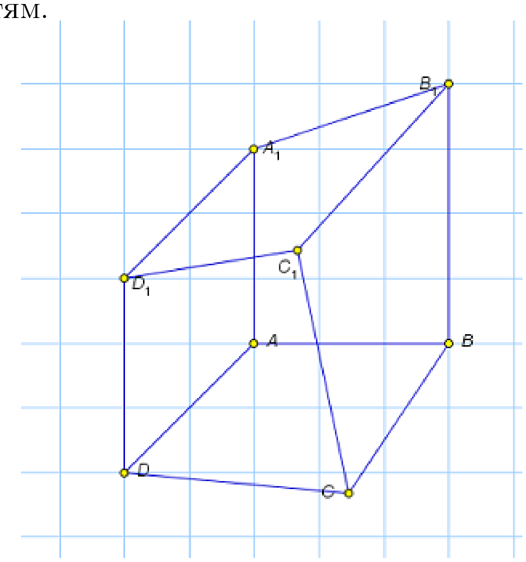
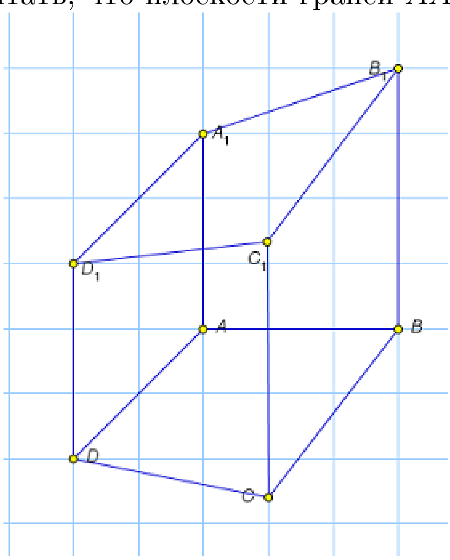
Нет, не могут. Покажем, что диагонали CA_1 и DB_1 тоже будут пересекаться. Для этого достаточно показать, что DA_1 и CB_1 лежат в одной плоскости.

Упростим задачу, сведя задачу для произвольного многогранника к аналогичной задаче для многогранника специального, более простого вида.

Во-первых, с помощью невырожденного линейного преобразования исходный многогранник можно перевести в многранник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{A}_1\tilde{B}_1\tilde{C}_1\tilde{D}_1$, в котором плоскости граней $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$, $\tilde{A}\tilde{A}_1\tilde{B}\tilde{B}_1$ и $\tilde{A}\tilde{A}_1\tilde{D}\tilde{D}_1$ попарно перпендикулярны. Свойство пересечения диагоналей инвариантно относительно такого преобразования. Таким образом, не теряя общности, можно считать что грани $ABCD$, AA_1BB_1, AA_1DD_1 исходного многогранника принадлежат попарно перпендикулярным плоскостям.

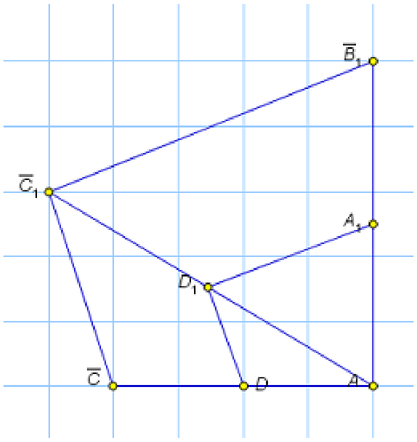


Во-вторых, изменение длин ребер D_1C_1, A_1B_1, DC при остающихся неподвижными точками D_1, A_1, D свойство пересечения диагоналей также сохраняет. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что плоскости граней AA_1DD_1 и CC_1BB_1 параллельны.



Покажем, что DA_1 и CB_1 параллельны.

Рассмотрим проекции вершин C, C_1, B, B_1 на плоскость грани AA_1DD_1. Проекция B совпадает с точкой A. Проекции C, C_1, B_1 обозначим $\bar{C}$, $\bar{C}_1$, $\bar{B}_1$ соответственно. Так как точки A, B, C_1, D_1 лежат в одной плоскости, то их проекции лежат на одной прямой.



Из параллельности граней AA_1DD_1 и CC_1BB_1 вытекает, что $\bar{C}\bar{C}_1 \parallel DD_1$ и $\bar{C}_1\bar{B}_1 \parallel D_1A_1$. Откуда $\bar{C}\bar{B}_1 \parallel DA_1$. Следовательно, $CB_1 \parallel DA_1$, и, в частности, лежат в одной плоскости. Откуда вытекает, что CA_1 и DB_1 пересекаются.