О. Б. Полубасов   26.10.2012 г.

ММ168 (5 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 27.10.12

Существует ли многогранник, у которого ровно:
2 диагонали;
5 диагоналей;
7 диагоналей?

==

Под многогранниками будем понимать строго выпуклые многогранники (если не оговорено особо). Под диагоналями будем понимать пространственные диагонали, то есть неупорядоченные пары вершин, не принадлежащих одной грани.

Теорема 1. Для любого D $\geq$ 0 существует выпуклый многогранник, имеющий ровно D пространственных диагоналей.

Доказательство.

При D = 0 в качестве искомого многогранника можно взять любую пирамиду или треугольную призму.

При D > 0 к боковой грани (D+2)-угольной пирамиды приклеим треугольную пирамиду, так чтобы фигура осталась выпуклой. Полученный многогранник (рис. 1) имеет ровно D диагоналей.

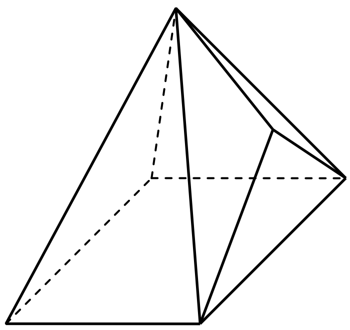

Рис.1. Строение многогранника с заданным числом диагоналей.

Ответ. На все три вопроса ответ «да».

Рассмотрение смежных вопросов.

Понятно, что могут существовать и другие выпуклые многогранники, имеющие ровно D пространственных диагоналей. Интересно, конечно ли их число. Исключим из дальнейшего рассмотрения пирамиды.

Теорема 2.

Множество односвязных многогранников с заданным числом пространственных диагоналей D > 0 конечно.

Заметим, что выпуклости от многогранников не требуется, требуется только односвязность.

Доказательство.

Каркас любого односвязного многогранника является планарным графом, так как плоскость топологически эквивалентна сфере с выколотой точкой. Для планарного графа, имеющего V вершин и E рёбер, выполняется: $E \le 3V - 6$, причём равенство достигается только для триангуляции, то есть, когда все грани, включая и внешнюю, треугольные. В триангуляции все диагонали – пространственные, поэтому их число

$$\frac{V(V-1)}{2} - E = \frac{V(V-1)}{2} - (3V-6) = \frac{V^2-7V+12}{2} = \frac{(V-3)(V-4)}{2}.$$

При удалении рёбер из триангуляции число пространственных диагоналей уменьшается, поскольку появляются нетреугольные грани. Поэтому выписанное выражение является максимумом для D. Для заданного V минимум числа диагоналей, очевидно, достигается на многограннике, содержащем (V – 1)-угольник, то есть на пирамиде. Но пирамиды исключены из рассмотрения, поэтому при $V \ge 6$ минимум достигается на многограннике, содержащем (V – 2)-угольник и два четырёхугольника (рис. 2).

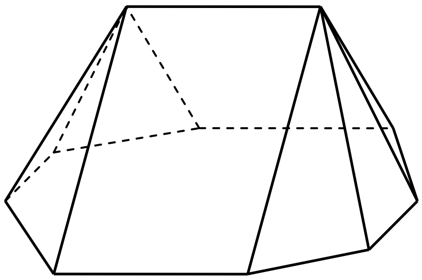

Рис.2. Строение многогранника с минимальным числом диагоналей.

Таким образом, $V-6 \le D \le \frac{(V-3)(V-4)}{2}$, $3 + \left\lceil \frac{1+\sqrt{8D+1}}{2} \right\rceil \le V \le D + 6$, но количество многогранников с ограниченным числом вершин конечно.

Составим табличку (таб. 1) возможного количества диагоналей для многогранников с небольшим числом вершин (исключая пирамиды).

V	D_{min}	D_{max}
5	1	1
6	0	3
7	1	6
8	2	10
9	3	15
10	4	21
11	5	28
12	6	36
13	7	45
14	8	55

Таблица 1.

Существует 6 многогранников с двумя диагоналями, все они перечислены на рис. 3.

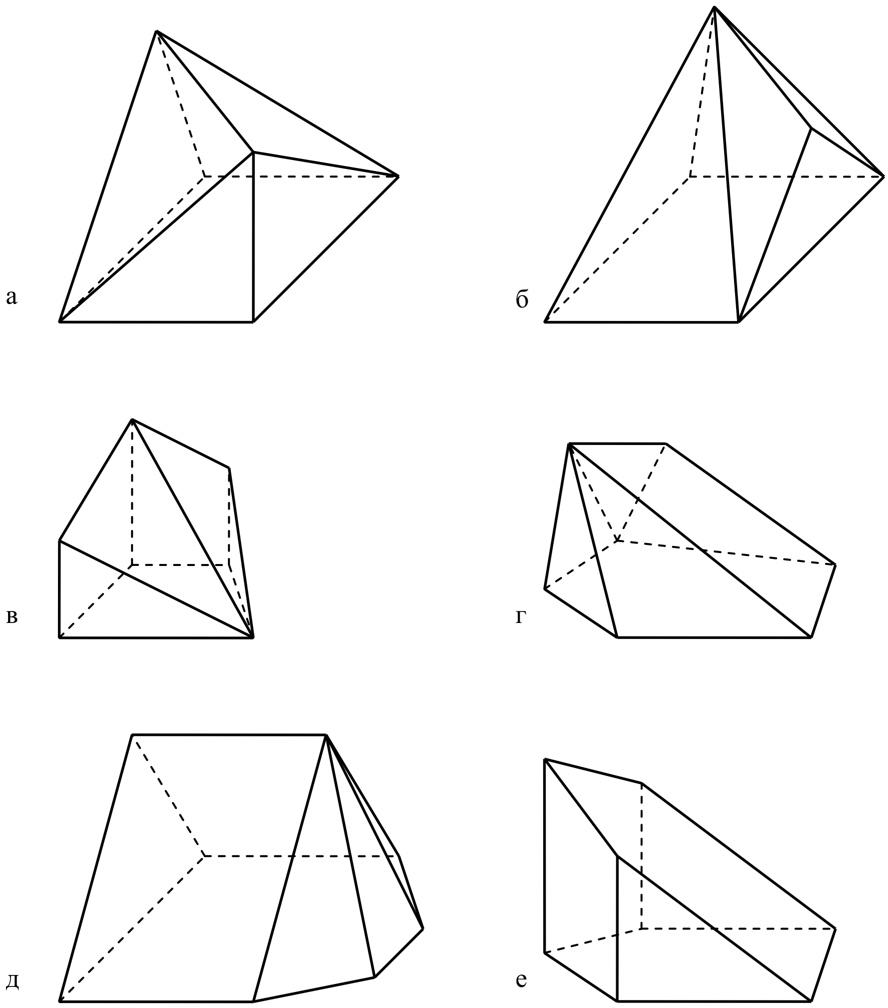

Рис.3. Все многогранники с двумя пространственными диагоналями.

Перечислять все многогранники с пятью, а тем более с семью диагоналями слишком объёмно. Семивершинные многогранники с 5 пространственными диагоналями перечислены на рис. 4.

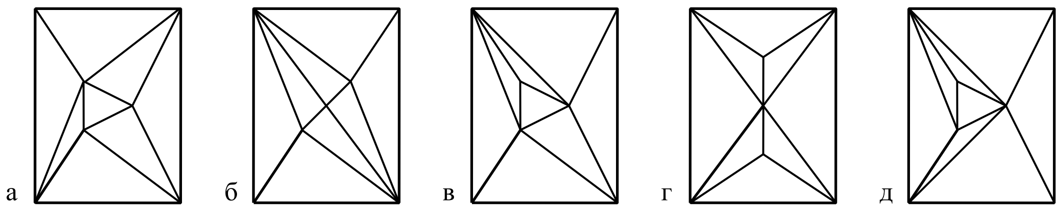

Рис. 4. Все 7-вершинные многогранники с 5 пространственными диагоналями. Вид сверху.

Теперь рассмотрим случай, когда подсчитываются все диагонали, а не только пространственные.

Здесь под диагоналями будем понимать диагонали общего вида, то есть неупорядоченные пары вершин, не соединённых ребром.

Теорема 3. Для любого D ≥ 0 существует выпуклый многогранник, имеющий ровно D диагоналей общего вида.

Алгоритм построения.

1. Вычислить $n = 2 + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8D+1}}{2} \right\rfloor$.
2. Построить n-угольную пирамиду с выпуклым основанием.
3. Произвольно провести в основании пирамиды $D - \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ непересекающихся диагоналей.
4. Слегка согнуть основание по линиям проведённых диагоналей, так чтобы полученный многогранник стал строго выпуклым (боковые рёбра пирамиды считать «резиновыми»).

Получившийся многогранник имеет ровно D диагоналей общего вида.

Доказательство.

Диагонали общего вида построенного многогранника – это все диагонали n-угольника, лежащего в основании пирамиды, за вычетом проведённых диагоналей, которые превратились в рёбра. N-угольник имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагонали, из которых можно выбрать (n-3) непересекающихся. Следовательно, многогранник, полученный из n-угольника, может иметь

от $L_n = \frac{n(n-3)}{2} - (n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

до $H_n = \frac{n(n-3)}{2}$

диагоналей общего вида.

Заметим, что $L_{n+1} = H_n + 1$, поэтому подходящее n можно выбрать для любого D, причём единственным образом. $L_n \le D < L_{n+1}$, что в точности соответствует формуле из алгоритма.

Поэтому и для диагоналей общего вида ответ на все три вопроса задачи положительный.

Понятно, что могут существовать и другие выпуклые многогранники, имеющие ровно D диагоналей общего вида. Хочется узнать, конечно ли их число.

Всего неупорядоченных пар вершин $\frac{V(V-1)}{2}$, поэтому число диагоналей общего вида

$$D = \frac{V(V-1)}{2} - E \ge \frac{V(V-1)}{2} - (3V-6) = \frac{V^2-7V+12}{2} = \frac{(V-3)(V-4)}{2}.$$

С другой стороны, степень любой вершины многогранника должна быть не меньше 3, поэтому $E \geq \left\lceil \frac{3V}{2} \right\rceil$,

$D = \frac{V(V-1)}{2} - E \leq \frac{V(V-1)}{2} - \left\lceil \frac{3V}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{V(V-4)}{2} \right\rfloor$.

Следовательно $2 + \left\lceil \sqrt{2D+4} \right\rceil \leq V \leq 3 + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8D+1}}{2} \right\rfloor$, то есть для каждого значения D диапазон числа вершин ограничен, а так как количество многогранников с заданным числом вершин конечно, то доказана теорема 4.

Теорема 4.

Множество односвязных многогранников с заданным числом диагоналей общего вида конечно.

Заметим, что выпуклости от многогранников не требуется, требуется только односвязность.

Любопытно, что на триангуляции достигается максимум числа пространственных диагоналей и одновременно минимум числа диагоналей общего вида.

Перечисление многогранников с заданным числом диагоналей общего вида

Составим табличку (таб. 2) возможного количества диагоналей общего вида для многогранников с небольшим числом вершин.

V	D_{min}	D_{max}
4	0	0
5	1	2
6	3	6
7	6	10
8	10	16
9	15	22
10	21	30

Таблица 2.

Естественно, D_{min} совпадает с L_{V-1} из теоремы 3, так как формулы одни и те же. А вот D_{max}, начиная с V = 6, превышает H_{V-1}. Теорема 3 конструктивно доказывает только существование многогранников с $L_{V-1} \leq D \leq H_{V-1}$. При желании, существование многогранников с $H_{V-1} < D \leq D_{max}$ можно доказать, воспользовавшись двойственностью многогранников (так, призмы двойственны бипирамидам, n-угольная призма имеет $D = \frac{V(V-1)}{2} - \frac{3V}{2} = \frac{V(V-4)}{2}$, что как раз соответствует D_{max} для V = 2n), но здесь это излишне.

Оказалось, что ровно две диагонали общего вида имеет только четырёхугольная пирамида, ровно пять диагоналей – только пятиугольная пирамида и фигура на рисунке 5. А вот ровно семь диагоналей имеют целых 5 многогранников, и все они как раз представлены на рис. 4. Других многогранников с заданным в условии задачи числом диагоналей общего вида не существует.

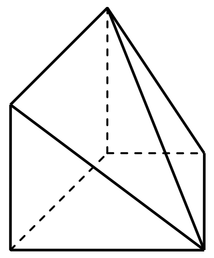

Рис. 5. Многогранник с 5 диагоналями общего вида.