Шамсутдинов Константин

# MM249

Ответ: Может, например, k=2, a=3(673) 1(1) - имеет 3 цикла по 673 элемента и один неподвижный элемент.

Решение.

Будем считать неподвижный элемент циклом из одного элемента.

m циклов длины n обозначим как m(n).

Если перестановка имеет m1 циклов длины n1, m2 циклов длины n2,… mi циклов длины ni, то ее обозначим как: m1(n1) m2(n2) … mi(ni).

По условию xk=a. После возведение в степень k цикл длины u в x перейдет s циклов длины n, причем m=НОД(u,k), n=u/s:

(u)k=s(n).

Заметим, что в частности может n=1.

Количество различных циклов из u=sn элементов, которые при возведении в степень k, дают данную перестановку из s циклов по n элементов равно (s-1)!ns-1. При этом должно выполняться k⋮s, k/s взаимно просто с n. (1)

Рассмотрим перестановку из условия задачи:

a=m1(n1) m2(n2) … mi(ni).

Назовем группу циклов одинаковой длины - mj(nj) – кластером. Рассмотрим один кластер из a - m(n). m циклов из него разбиваются на группы циклов, каждая группа получается из одного цикла x. Пусть будет r1 таких групп из s1 циклов, … rv групп из sv циклов, m=r1s1+ r2s2+…rvsv. Причем все s из {s1,…,sv} должны удовлетворять (1): k⋮s, k/s взаимно просто с n. Заметим, что значит все si должны делиться на НОД(k,n), значит m ⋮ НОД(k,n).

Количество всех решений исходного уравнения xk=a будет равно произведению количества решений по каждому кластеру *a*.

После преобразований получаем, что количество решений по кластеру m(n) из a равно

$$A\left(k,m,n\right)=\sum\_{\begin{array}{c}по допустимым \\делениям на \left\{\left(s\_{i}, r\_{i}\right)\right\}\end{array}}^{}\frac{m!n^{m-\sum\_{}^{}r\_{i}}}{\prod\_{i}^{}\left(s\_{i}^{r\_{i}} r\_{i}!\right)} (2)$$

Нас интересуют A(k,m,n), являющиеся делителями 2020.

Для k=2 перебираем все m и n такие, что mn≤2020, получаем следующие решения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A(k,m,n) | Количестворешений | Решения m(n) |
| 2020 | 1 | 3(673) |
| 1010 | 2 | 2(1009), 2(1010)  |
| 404 | 2 | 2(403), 2(404)  |
| 202 | 3 | 3(67), 2(201), 2(202) |
| 20 | 2 | 2(19), 2(20) |
| 10 | 4 | 4(1), 3(3), 2(9), 2(10) |
| 4 | 3 | 3(1), 2(3), 2(4) |
| 2 | 2 | 2(1), 2(2) |
| 1 | 1010 | … |

Нам нужно выбрать какие-то решения (Ai, mi, ni), так чтобы:

1. П Ai=2020,
2. ∑ mini=2020,
3. ni были различны.

Можно предложить следующие решения:

1. 3(673) 1(1) – указано в ответе,
2. 2(1009) 2(1),
3. 3(67) 4(1) 1(1815)

и т.д.

Для решения 1) покажем, почему A(2,3,673)=2020. То же верно для k, которые делятся на 2 и не делятся на 3. Для таких k и m=3 возможные s, удовлетворяющие (1): 1 и 2.

m=3 можно разбить на {(ri, si)} следующими способами:

1. (1,2),(1,1), слагаемое из (2) = $\frac{3! 673}{2}$=2019,
2. (3,1) , слагаемое из (2) =$\frac{3!}{3!}=1$.

2019+1=2020.

Аналогично можно получить для любого k. Заметим, что для нечетных k решений нет.