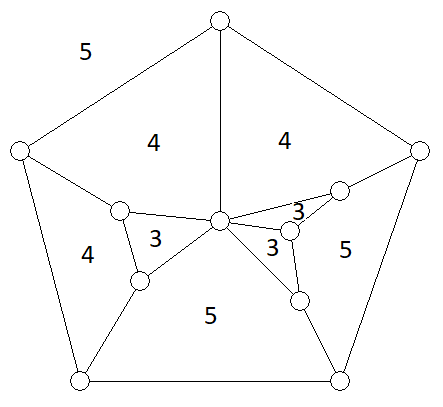
Шамсутдинов Константин

# MM269

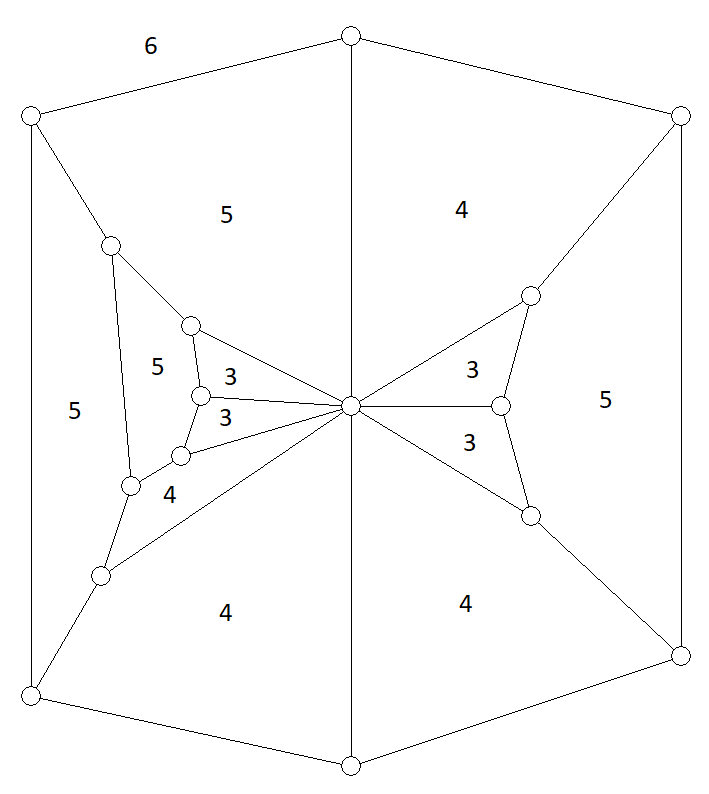
Оценка задачи: 5.

Ответ: a) 6, b) 9:

a)



b)



Обозначим:

– число граней

– число ребер

– число вершин

– степень k-ой вершины,

– максимальная степень вершины.

Подставляем полученные выражения для , и в формулу Эйлера для выпуклого многогранника:

После преобразований получаем:

Из чего следует:

,

причем равенство достигается, если степени всех, кроме одной вершины равны 3, нет граней с числом сторон больше 6, а , , .

Значит, указанные результаты для максимальны.

**Дополнительно**

Пусть достигается доказанный максимум для степени определенной вершины A:

. (1)

Рассмотрим на гранях, содержащих вершину A, вершины, не соединенные ребром с A. У разных граней эти вершины не могут совпадать, и их минимальное количество достигается, когда из A исходит m треугольников, m четырехугольников и m-3 пятиугольников и равно

.

Значит, количество вершин в многограннике будет не меньше

.

С другой стороны, из формулы для количества вершин:

.

Откуда следует, что

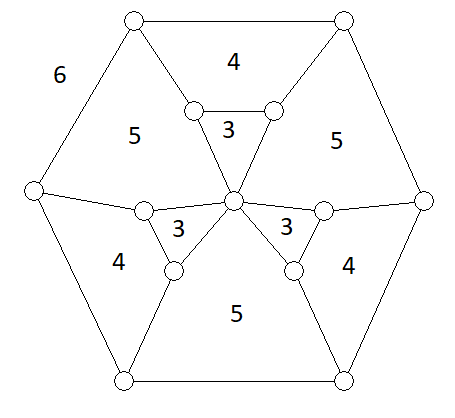
. (2)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 3 | 0 |
| 4 | 1 |
| 5 | 3 |
| 6 | 4 |
| 7 | 6 |
| 8 | 7 |
| 9 | 9 |
| 10 | 10 |
| 11 | 12 |

Поэтому, при m>10

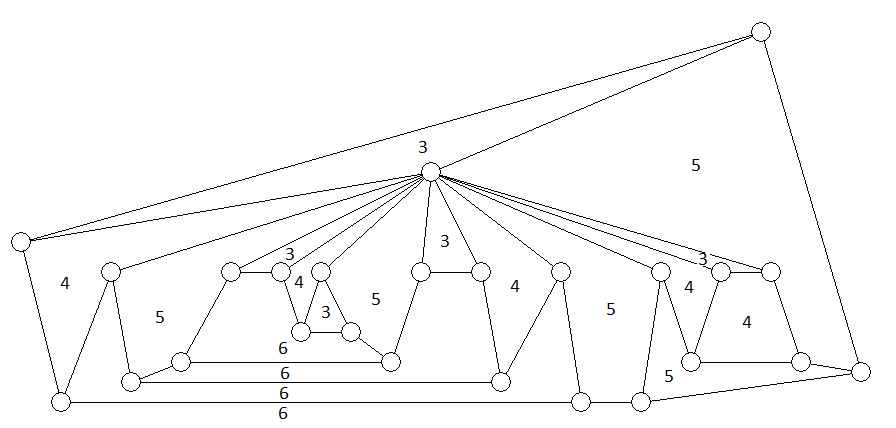
Указанные примеры для и 4 как раз обладают минимальным f6.

Для m=3 приведем другой пример с f6=1:

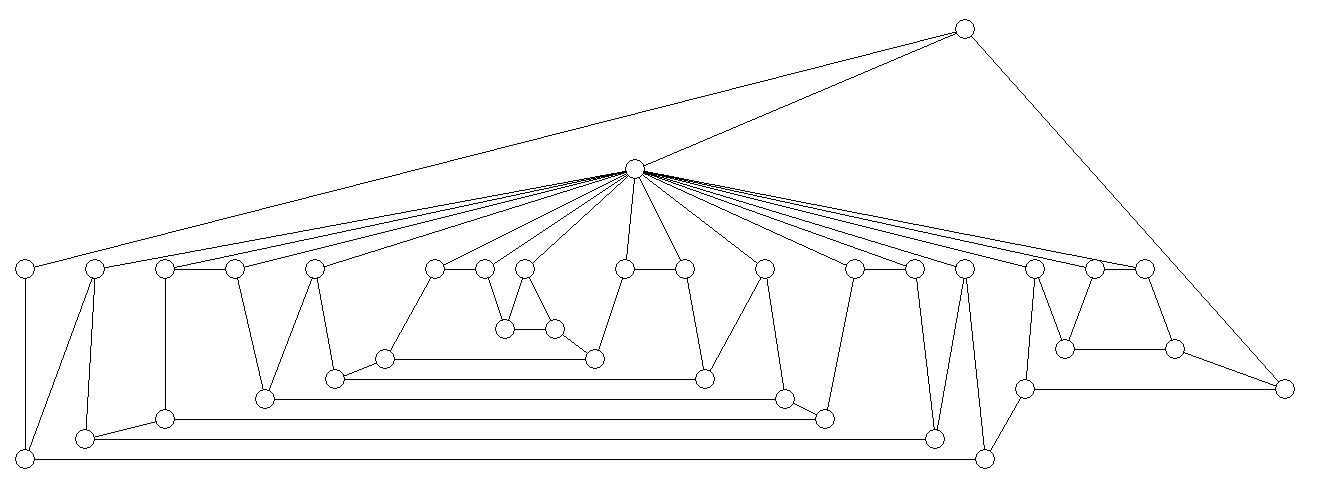


Приведем многогранники с максимальной степенью вершины для m=5 и 7.

m=5, r=12, f6=4:



m=7, r=18, f6=7:



Такая схема не годится для m≥9, так как f6>m.

Для четного m немного не успел.