Шамсутдинов Константин

# MM269

Оценка задачи: 5.

Ответ: a) 6, b) 9:

a)



b)



Обозначим:

$s=\sum\_{}^{}f\_{i}$ – число граней

$e=\frac{\sum\_{}^{}f\_{i}}{2}$ – число ребер

$v$ – число вершин

$r\_{k}$ – степень k-ой вершины,

$r=max⁡(r\_{k})$ – максимальная степень вершины.

$\sum\_{}^{}r\_{k}=2e=\sum\_{}^{}if\_{i} ⇒$

$\sum\_{}^{}\left(\left(r\_{k}-3\right)+3\right)=\sum\_{}^{}\left(r\_{k}-3\right)+3v=\sum\_{}^{}if\_{i} ⇒$

$v=\frac{\sum\_{}^{}if\_{i}-\sum\_{}^{}\left(r\_{k}-3\right)}{3}$

Подставляем полученные выражения для $s$, $e$ и $v$ в формулу Эйлера для выпуклого многогранника:

$e+2=s+v$

После преобразований получаем:

$\sum\_{}^{}f\_{i}\left(6-i\right)=2\sum\_{}^{}\left(r\_{k}-3\right)+12$

Из чего следует:

$r\leq 3(m-1)$,

причем равенство достигается, если степени всех, кроме одной вершины равны 3, нет граней с числом сторон больше 6, а $f\_{3}$, $f\_{4}$, $f\_{5}=m$.

Значит, указанные результаты для $m=3, 4$ максимальны.

**Дополнительно**

Пусть достигается доказанный максимум для степени определенной вершины A:

$r=3\left(m-1\right)$. (1)

Рассмотрим на гранях, содержащих вершину A, вершины, не соединенные ребром с A. У разных граней эти вершины не могут совпадать, и их минимальное количество достигается, когда из A исходит m треугольников, m четырехугольников и m-3 пятиугольников и равно

$m+2(m-3)$.

Значит, количество вершин в многограннике будет не меньше

$v\_{min}=m+2\left(m-3\right)+3\left(m-1\right)+1=6m-8$.

С другой стороны, из формулы для количества вершин:

$v=\frac{\sum\_{}^{}if\_{i}-\sum\_{}^{}\left(r\_{k}-3\right)}{3}=3m+2f\_{6}+2$.

Откуда следует, что

$f\_{6}\geq \frac{3}{2}m-5$. (2)

|  |  |
| --- | --- |
| $$m$$ | $$f\_{6 min}$$ |
| 3 | 0 |
| 4 | 1 |
| 5 | 3 |
| 6 | 4 |
| 7 | 6 |
| 8 | 7 |
| 9 | 9 |
| 10 | 10 |
| 11 | 12 |

Поэтому, при m>10

$r<3\left(m-1\right)$

Указанные примеры для $m=3$ и 4 как раз обладают минимальным f6.

Для m=3 приведем другой пример с f6=1:



Приведем многогранники с максимальной степенью вершины для m=5 и 7.

m=5, r=12, f6=4:



m=7, r=18, f6=7:



Такая схема не годится для m≥9, так как f6>m.

Для четного m немного не успел.