ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СУЩЕСТВОВАНИЕ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В нашей работе предлагается общий подход к решению широкого класса задач на существование треугольников, обладающих определенной комбинацией свойств. Важными отличительными свойствами предлагаемого подхода являются его универсальность и высокая наглядность получаемых результатов.

В процессе работы мы использовали систему компьютерной алгебры «Maple».

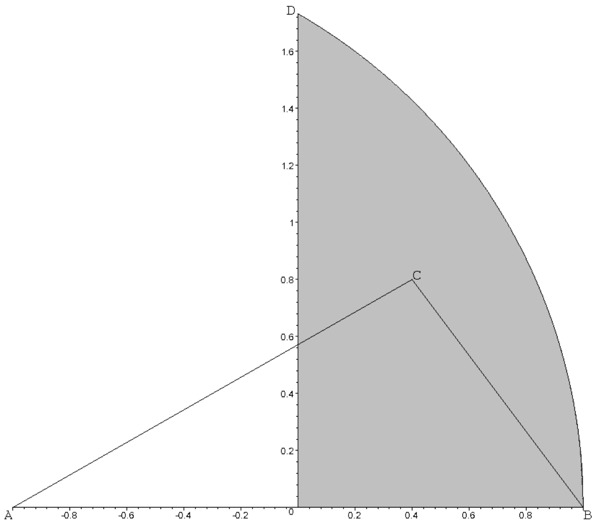

Рис. 1

Рассмотрим в координатной плоскости область, ограниченную осями координат и дугой окружности радиуса 2 с центром в точке $A(-1;0)$ (см. рис. 1). Каждому положению точки C внутри или боковых границах этой области соответствует треугольник ABC. Обратно, для любого треугольника найдется единственное положение точки C в данной области, такое, что треугольник ABC будет подобен исходному треугольнику. Если точка C принадлежит отрезку OB, то «треугольник» ABC – вырожденный.

В дальнейшем слово «единственный» по отношению к треугольникам будем употреблять в значении «единственный с точностью до подобия».

Проиллюстрируем предлагаемый нами подход на примере следующей задачи: «Существует ли треугольник, у которого радиус вписанной окружности и три радиуса вневписанных окружностей образуют геометрическую прогрессию?»

Условие $r_a r_c = r_b^{\,2}$ задает соотношение между координатами вершины C. Соответствующее геометрическое место точек представляет собой некую кривую. На рис. 2 интересующий нас участок этой кривой (BD) изображен синим цветом. Аналогично, условие $rr_b = r_a^{\,2}$ выполняется для вершин, расположенных на кривой KL. Соответствующая система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{4y^2}{(\sqrt{x^2+2x+1+y^2}+2+\sqrt{x^2-2x+1+y^2})(\sqrt{x^2-2x+1+y^2}+2-\sqrt{x^2+2x+1+y^2})} = \dfrac{4y^2}{\left(\sqrt{x^2+2x+1+y^2}+2-\sqrt{x^2-2x+1+y^2}\right)^2} \\ \dfrac{4y^2}{(\sqrt{x^2+2x+1+y^2}+2-\sqrt{x^2-2x+1+y^2})(\sqrt{x^2-2x+1+y^2}-2+\sqrt{x^2+2x+1+y^2})} = \dfrac{4y^2}{\left(\sqrt{x^2-2x+1+y^2}+2-\sqrt{x^2+2x+1+y^2}\right)^2} \end{cases}$$

Имеет в рассматриваемой области единственное решение:

$$x_1 = 2\left(\frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}}{3}+\frac{4}{3\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}}-\frac{2}{3}\right)^2-1,\ y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{4\sqrt[3]{\left(19+3\sqrt{33}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(19+3\sqrt{33}\right)^4}+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+22+6\sqrt{33}}{\sqrt[3]{\left(19+3\sqrt{33}\right)^2}}}$$

Таким образом, **существует единственный треугольник (*ABC₁* на рисунке 2), у которого радиус вписанной и три радиуса вневписанных окружностей образуют геометрическую прогрессию**. Дополнительно оказалось, что $x_1^2+y_1^2=1$, т.е. полученный треугольник прямоугольный.

Аналогично, кривые $r_a+r_c=2r_b$ (красная кривая на рис. 2) и $r+r_b=2r_a$ (кривая MN на рис. 2) имеют в рассматриваемой области единственную точку пересечения C_2 с координатами $x_2=\frac{1}{3},\ \ y_2=\frac{4}{3}\sqrt{2\cos\frac{4\pi}{9}+2-2\cos\frac{2\pi}{9}}$. Поэтому **существует единственный треугольник (ABC_2 на рис. 2), у которого радиус вписанной и три радиуса вневписанных окружностей образуют арифметическую прогрессию**.

В первых двух задачах нам удалось найти точное решение рассматриваемых систем. При рассмотрении последующих задач найти точные координаты точек пересечения интересующих нас кривых удается не всегда. В таких случаях координаты найдены лишь приближенно, но

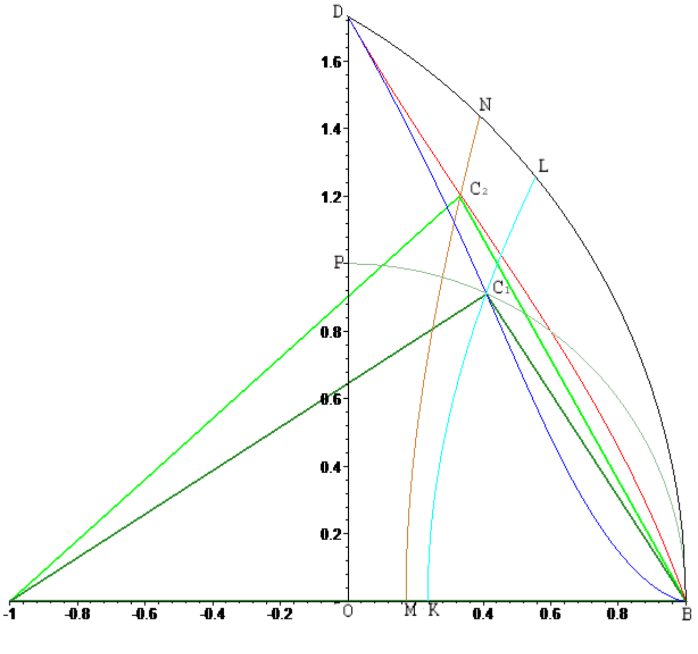

Рис. 2

наличие и количество точек пересечения удается определить точно, основываясь на свойствах непрерывных функций, методе Штурма и основной теореме алгебры многочленов.

Хорошо известно, что медианы любого треугольника удовлетворяют неравенству треугольника. Более того, площадь треугольника из медиан составляет $^3/_4$ от площади исходного треугольника. Треугольник из биссектрис существует не для любого исходного треугольника. На рисунке 3 соответствующая область ограничена дугами *OM*, *MD* и отрезком *DO*. Аналогично треугольник из высот исходного треугольника *ABC* существует, если точка *C* в области, ограниченной дугами *KL*, *LD* и отрезками *DO* и *OM*. Кривая *XY* – геометрическое место точек *C* таких, что площадь треугольника из биссектрис треугольника *ABC* составляет $^9/_{16}$ от площади треугольника *ABC*. Кривая *OP* - геометрическое место точек *C* таких, что площадь треугольника из высот треугольника *ABC* составляет $^{27}/_{64}$ от площади треугольника *ABC*. В рассматриваемой области эти кривые пересекаются в единственной точке C_3. Поэтому **существует единственный треугольник, у которого площадь исходного треугольника, площадь треугольника из медиан, площадь треугольника из биссектрис и площадь треугольника из высот образуют геометрическую прогрессию**.

Кривая *UV* – геометрическое место точек *C* таких, что площадь треугольника из биссектрис треугольника *ABC* составляет $^1/_2$ от площади треугольника *ABC*. Кривая *OQ* - геометрическое место точек *C* таких, что площадь треугольника из высот треугольника *ABC* составляет $^1/_4$ от площади треугольника *ABC*. В рассматриваемой области эти кривые пересекаются в единственной точке C_4. Таким образом, **существует единственный треугольник, у которого площадь исходного треугольника, площадь треугольника из медиан, площадь треугольника из биссектрис и площадь треугольника из высот образуют арифметическую прогрессию**.

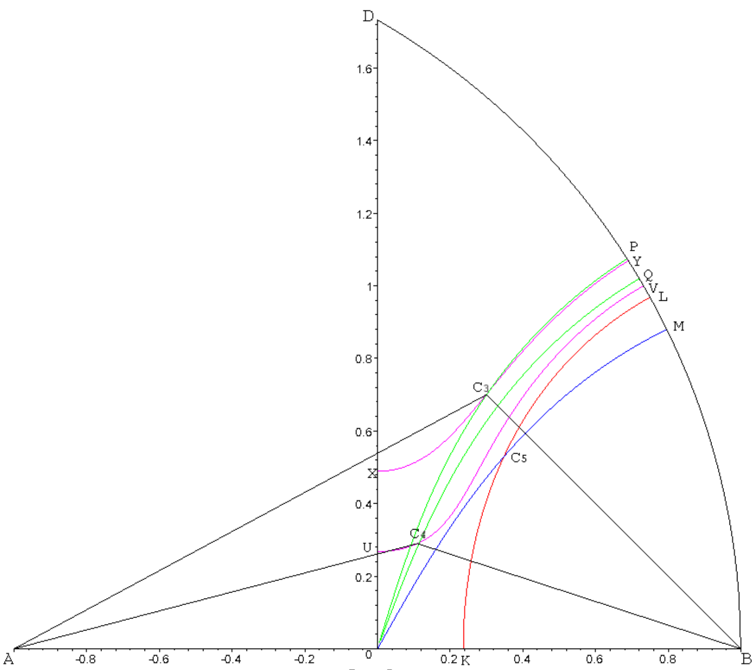

Рис. 3

Отметим, что существуют треугольники, у которых площадь треугольника из высот больше площади треугольника из биссектрис. Однако, не существует треугольников у которых площади треугольника, треугольника из медиан, треугольника из высот и треугольника из биссектрис, рассматриваемые в указанном порядке образуют арифметическую (геометрическую) прогрессию.

Из вышеизложенного дополнительно следует, что существуют треугольники у которых: существуют и треугольник из биссектрис, и треугольник из высот; существует только треугольник из биссектрис; существует только треугольник из высот; не существует ни треугольника из биссектрис, ни треугольника из высот. В частности, **существует единственный треугольник** (треугольник ABC_5 на рисунке 4), **у которого одновременно сумма двух биссектрис равна третьей и сумма двух высот равна третьей**.

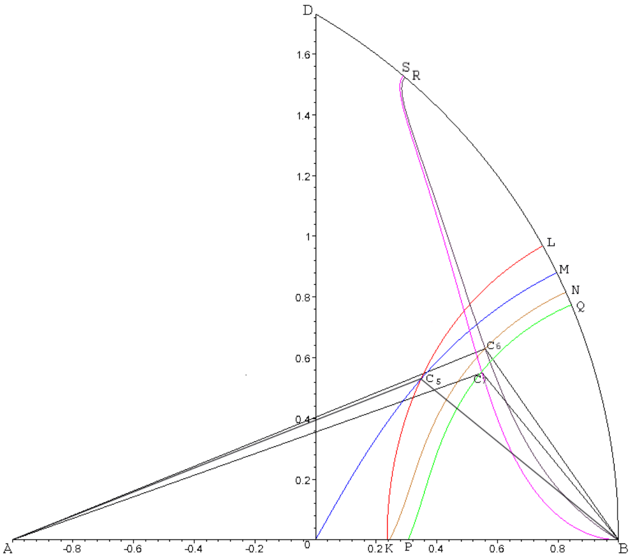

Рис. 4

Кривая *KN* на рисунке 4 – геометрическое место точек *C* таких, что квадрат периметра треугольника из медиан треугольника *ABC* равен произведению периметра *ABC* и суммы биссектрис треугольника *ABC*. Для точек кривой *BR* выполняется равенство квадрата суммы биссектрис треугольника *ABC* произведению сумм медиан и высот того же треугольника. Эти кривые пересекаются в точке C_6, которая попадает в область, для которой не существует треугольников из биссектрис и высот. Поэтому не существует треугольников, у которых периметр, периметр треугольника из медиан, треугольника из биссектрис и треугольника из высот образуют арифметическую прогрессию. В то же в**ремя, существует единственный треугольник, у которого суммы сторон, медиан, биссектрис и высот образуют геометрическую прогрессию**.

Аналогично, **существует единственный треугольник** (ABC_7 на рис. 4), **у которого суммы сторон, медиан, биссектрис и высот образуют геометрическую прогрессию.** У этого треугольника ни биссектрисы, ни высоты не удовлетворяют неравенству треугольника.

Если для данного треугольника существует треугольник из высот, то существует и треугольник из высот треугольника из высот и т. д. Это следует из того, что треугольник из высот треугольника из высот подобен исходному.

Иначе обстоит дело с треугольниками из биссектрис.

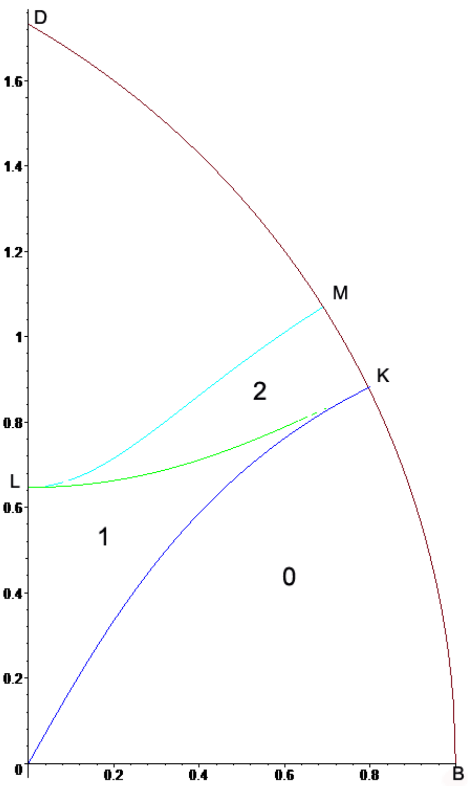

Рис. 5

Если *C* лежит в области (0), то для треугольника *ABC* не существует треугольника биссектрис. Если *C* лежит в области (1), то для треугольника *ABC* существует треугольник биссектрис, но не существует треугольника из «вторых биссектрис». И т. д.

Бесконечно много треугольников из биссектрис, разумеется, существует для *C* = *D*.

Если же $a < c$, то $\frac{c}{a} < \frac{b_{b_c}}{b_{b_a}}$.

Поэтому **при других *C* существует не более чем конечное число треугольников из биссектрис**. Так, для $C(0;\ 1.72)$ последовательность треугольников из биссектрис обрывается на 50818-м шаге.

Пусть множество $M = \{m_a, m_b, m_c, h_a, h_b, h_c, b_a, b_b, b_c\}$ в предположении, что $a \le b \le c$. Наша следующая задача – выяснить сколько элементов может быть в M. Эту задачу удобно решать одновременно с другой.

Будем считать, что два треугольника принадлежат к одному классу, если соответствующие им множества равномощны и одинаково упорядочены по возрастанию.

Мы хотим выяснить, на сколько классов разбивается множество всех треугольников при такой классификации.

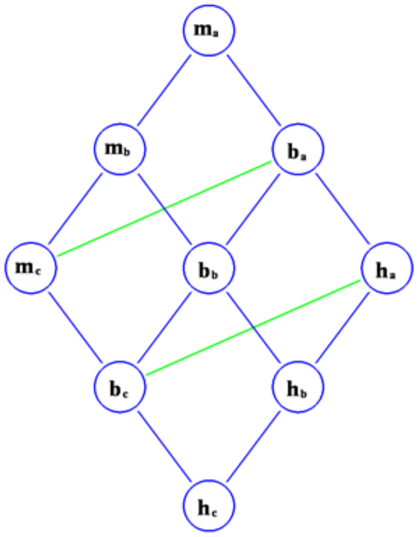

Рис. 6

Очевидны следующие соотношения:
$h_a \le b_a \le m_a$; $h_b \le b_b \le m_b$; $h_c \le b_c \le m_c$;
$h_c \le h_b \le h_a$; $b_c \le b_b \le b_a$; $m_c \le m_b \le m_a$.

Эти соотношения показаны синими линиями на рис. 6 (о зеленых линиях чуть позже). Для установления соотношений между b_c и h_b; b_c и h_a; m_c и h_b; m_c и b_b; m_c и h_a; m_c и b_a; b_b и h_a; m_b и h_a; m_b и b_a рассмотрим соответствующие равенства, как уравнения от координат точки C. В интересующей нас области эти уравнения будут задавать некоторые кривые. Чтобы не запутаться во множестве линий сделаем их разноцветными. То, что у нас получилось, представлено на рис. 7.

Первое, что бросается в глаза – отсутствие желтой и серой кривых. Это вызвано тем, что в любом треугольнике выполняются неравенства $b_c \le h_a$ и $m_c \le b_a$. Докажем первое из этих неравенств.

$$b_c \le h_a \Leftrightarrow b_c^2 \le h_a^2 \Leftrightarrow \frac{p(p-c)ab}{(a+b)^2} \le \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2} \Leftrightarrow 4a^3b \le (a+b)^2(c+b-a)(c-b+a) \Leftrightarrow$$

$$4a^3b + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 \le 0 \Leftrightarrow a^2(a^2-c^2) + b^2(b^2-c^2) + 2a^2b(a-b) + 2ab(a^2-c^2) \le 0$$

Но последнее неравенство очевидно, поскольку каждое из слагаемых не положительно.
Второе неравенство доказывается аналогично.

По рисунку трудно определить, как ведут себя исследуемые кривые вблизи точки B, а также в тех местах, где они устремляются к D близкими курсами. Разумеется, картинка не может служить надежным обоснованием интересующего нас поведения кривых. Но мы можем выписать уравнения каждой кривой и исследовать их попарное взаимное расположение более надежными методами. Мы проделали эту работу для всех сомнительных случаев. Детальный анализ показал, что интересующая нас область разбивается на 18 областей.

Особо отметим область №16: прежде чем вторично встретится в точке D голубая и золотистая кривые пересекаются в точке с координатами $x \approx 0.4538925, y \approx 1.301219585$.

Поведение кривых вблизи точки B можно разглядеть на рисунке 8.

Отмечу, что точка C_8 это именно точка пересечения трех кривых, а не область (равенства $m_c = b_b$ и $b_b = h_a$ влекут $m_c = h_a$).

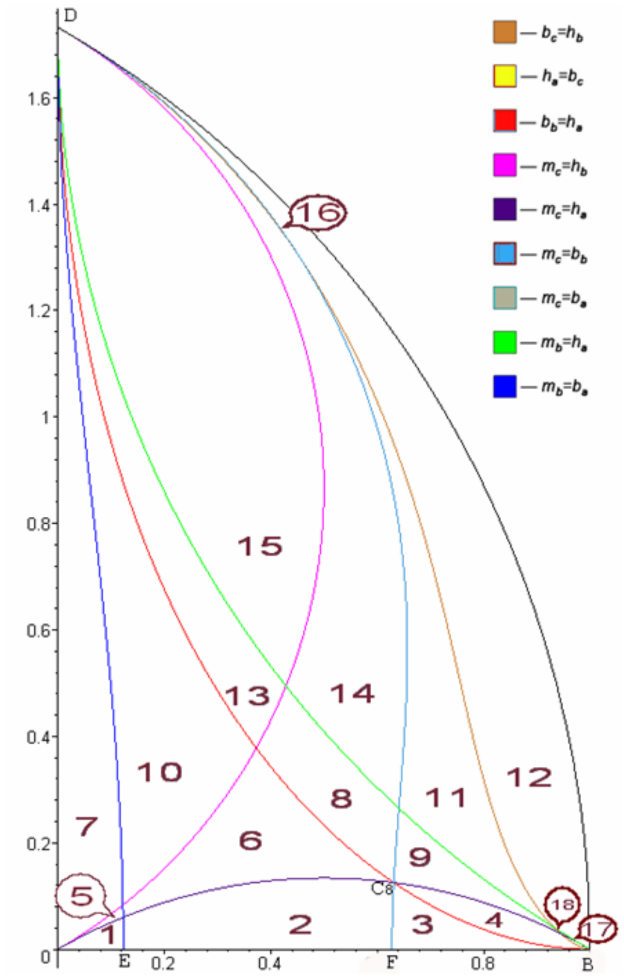

Рис. 7

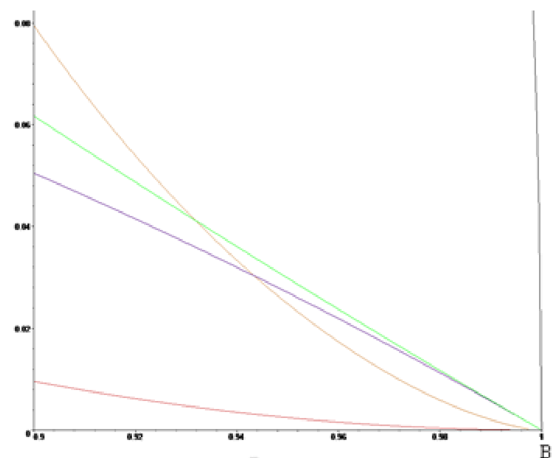

Рис. 8

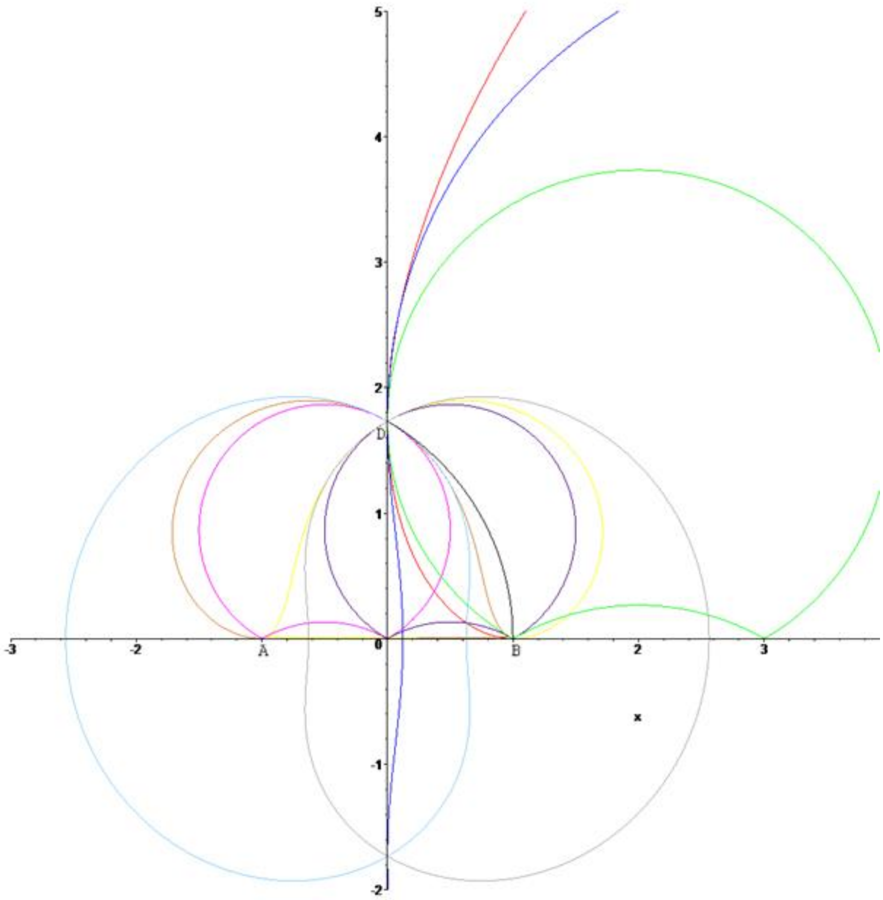

Рис. 9

На первый взгляд, темно-фиолетовая кривая ведет себя довольно странно. Ведь она не проходит через точку D, через которую обязаны проходить все 9 кривых, на самом деле, нет ничего странного. Это хорошо видно из рисунка 9, показывающего поведение рассматриваемых кривых за пределами изучаемой области. На этом же рисунке видны и две «пропавшие» кривые: желтая и серая.

Теперь мы в состоянии ответить на интересующие нас вопросы.

Если C – внутренняя точка любой из 18-и областей все 9 элементов множества $\{m_a, m_b, m_c, b_a, b_b, b_c, h_a, h_b, h_c\}$ различны. Если C лежит на внутренней границе областей, то два и из девяти значений совпадают, и $|M| = 8$. Если C лежит на пересечении двух кривых внутри области, то совпадают две пары элементов и $|M| = 7$. Аналогично $|M| = 7$, если $C = C_8$ (в этом случае $m_a = b_b = h_c$).

Если C – внутренняя точка дуги BD или отрезка OD (т.е. треугольник ABC равнобедренный), то, очевидно, $|M| = 4$. Наконец, при $C = D$ все девять элементов M равны между собой. Таким образом, **количество элементов во множестве $\{m_a, m_b, m_c, b_a, b_b, b_c, h_a, h_b, h_c\}$ может быть равно одному из чисел 1, 4, 7, 8, 9**.

Если допустить к рассмотрению вырожденные треугольники, то $|M|$ может принимать еще несколько значений. Если C – внутренняя точка отрезка OB, отличная от E и F, то все высоты и биссектриса b_c (учтем, она делит противолежащую сторону в отношении прилежащих) равны 0, остальные величины попарно различны. Поэтому $|M| = 6$. Если $C = F$ ($C = E$), то совпадают еще m_c с b_b (m_b с b_a) и $|M| = 5$. Если C совпадает O, то $m_a = m_b$, $b_a = b_b$, а остальные значения равны 0 и $|M| = 3$. Наконец, если C совпадает с B, то $m_a = b_a = h_a$, (поскольку треугольник равнобедренный) $m_b = m_c$, а остальные величины равны 0 и $|M|$ опять равно 3. Окончательно получаем 8 возможных значений $|M|$: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Для рассмотрения возможных упорядочиваний M заметим, что:

$m_b < b_a$ справа от синей линии;
$m_b < h_a$ справа от зеленой линии;
$m_c < b_b$ слева от голубой линии;
$m_c < h_a$ сверху от темно-фиолетовой линии;
$m_c < h_b$ слева от сиреневой линии;
$b_b < h_a$ справа от красной линии;
$b_c < h_b$ слева от золотой линии.

С учетом этих неравенств получаем 18 (по числу областей) возможных упорядочиваний множества M в случае, когда в нем 9 элементов:

1. $h_c < b_c < h_b < h_a < m_c < b_b < b_a < m_b < m_a$
2. $h_c < b_c < h_b < h_a < m_c < b_b < m_b < b_a < m_a$
3. $h_c < b_c < h_b < h_a < b_b < m_c < m_b < b_a < m_a$

4. $h_c < b_c < h_b < b_b < h_a < m_c < m_b < b_a < m_a$
5. $h_c < b_c < h_b < m_c < h_a < b_b < b_a < m_b < m_a$
6. $h_c < b_c < h_b < m_c < h_a < b_b < m_b < b_a < m_a$
7. $h_c < b_c < m_c < h_b < h_a < b_b < b_a < m_b < m_a$
8. $h_c < b_c < h_b < m_c < b_b < h_a < m_b < b_a < m_a$
9. $h_c < b_c < h_b < b_b < m_c < h_a < m_b < b_a < m_a$
10. $h_c < b_c < m_c < h_b < h_a < b_b < m_b < b_a < m_a$
11. $h_c < b_c < h_b < b_b < m_c < m_b < h_a < b_a < m_a$
12. $h_c < h_b < b_c < b_b < m_c < m_b < h_a < b_a < m_a$
13. $h_c < b_c < m_c < h_b < b_b < h_a < m_b < b_a < m_a$
14. $h_c < b_c < h_b < m_c < b_b < m_b < h_a < b_a < m_a$
15. $h_c < b_c < m_c < h_b < b_b < m_b < h_a < b_a < m_a$
16. $h_c < h_b < l_c < m_c < l_b < m_b < h_a < l_a < m_a$
17. $h_c < h_b < l_c < l_b < h_a < m_c < m_b < l_a < m_a$
18. $h_c < h_b < l_c < l_b < m_c < h_a < m_b < l_a < m_a$

Располагая *C* во внутренних точках участков внутренних границ 18-и областей, получим 26 упорядочиваний M в случае, когда в нем 8 элементов (каждое получается из двух упорядочиваний 9-го множества, отличающихся транспозицией соседних элементов, объединением этих элементов в один). 9 упорядочиваний получается в случае, когда $|M| = 7$ и *C* совпадает с одной из точек пересечения кривых, разбивающих рассматриваемую область на 18 частей. Еще два упорядочивания возникают, когда треугольник *ABC* равнобедренный (когда *C* – внутренняя точка дуги *BD* либо отрезка *OB*). Последний случай для невырожденных треугольников – *C* = *D*. Итого ***18 + 26 + 9 + 2 + 1 = 56* вариантов упорядочивания для невырожденных треугольников**.

Для вырожденных треугольников возможны еще 7 случаев упорядочивания: 3, когда *C* является внутренней точкой отрезков *OE, EF* или *FB*; 4, когда С совпадает с одной из точек *O, E, F, B*. Итого *56 + 7 = 63* упорядочивания (или 62, если исключить из рассмотрения случай, *C = B*, когда вершины не просто лежат на одной прямой, но и совпадают).

Отметим, что попутно мы получили еще один интересный результат: **существует единственный разносторонний треугольник** (ABC_2), **у которого большая высота, средняя биссектриса и меньшая медиана равны между собой**.

Предлагаемый подход позволяет решать и другие подобные задачи.