Различные подходы к классификации несамопересекающихся многоугольников

В работе рассмотрены различные подходы к классификации несамопересекающихся многоугольников. Предлагаемые основания для классификаций могут служить мерой отклонения многоугольника от выпуклости. Для всех классификаций найдено количество классов многоугольников с малым числом сторон. Во многих случая найдены общие формулы для подсчета числа классов.

Под многоугольником мы будем понимать плоскую замкнутую несамопересекающуюся ломаную, никакие три последовательные вершины которой не коллинеарны. Число сторон исходного многоугольника обозначим через n. Назовем вершину многоугольника *опорной*, если она одновременно является вершиной выпуклой оболочки исходного многоугольника. Например, вершина A шестиугольника ABCDEF, изображенного на рисунке 1, является опорной, а вершина C – нет.

Назовем сторону многоугольника *свободной*, если продолжение этой стороны за каждую ограничивающую ее вершину в некоторой окрестности этой вершины лежит вне многоугольника. Назовем сторону *полусвободной*, если вне многоугольника лежит продолжение стороны ровно за одну из двух ограничивающих ее вершин. Сторону, не являющуюся ни свободной, ни полусвободной, будем называть *зажатой*. Например, сторона AB (рис. 1), является свободной, сторона BC – полусвободной, а сторона EF – зажатой.

Диагональ, все точки которой принадлежат многоугольнику, будем называть *внутренней*. Диагональ, не имеющую с многоугольником общих точек, за исключением вершин, которые она соединяет, будем называть *внешней*. Например, диагональ BF (рис. 1) – внутренняя, а диагональ BD – внешняя (диагональ BE не является ни внешней, ни внутренней).

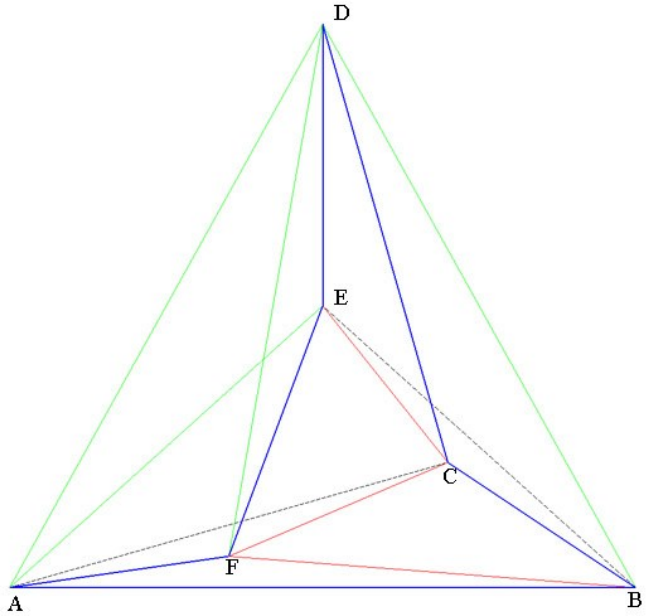

Рис. 1

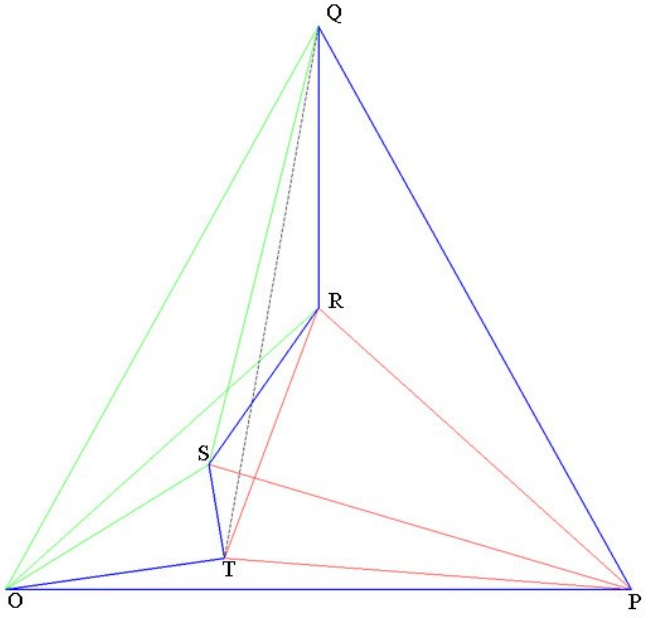

Рис. 2

В каждой из рассматриваемых классификаций выпуклые многоугольники с фиксированным числом сторон образуют один класс. Поэтому значения всех классифицирующих признаков могут, в некотором смысле, служить мерой отклонения многоугольника от выпуклого.

В качестве возможных оснований классификации мы рассматривали следующие характеристики многоугольников:

- число и расположение опорных вершин многоугольника;
- число и расположение внутренних углов, больших развернутого;
- отслеживание смен направления (против или по часовой стрелке) при обходе многоугольника;
- число и расположение свободных (зажатых) сторон;
- число внутренних (внешних) диагоналей;
- комбинирование близких характеристик.

Заметим, что рассмотрение полусвободных сторон приводит к тем же классификациям, что и отслеживание смен направления при обходе многоугольника.

С большинством рассматриваемых в работе классифицирующих признаков связано по две классификации. В первом случае учитывается лишь возможное количественное значение той или иной характеристики многоугольника (например, количество углов больше развернутого), а во втором – расположение соответствующих объектов в многоугольнике (например, чередование вершин, в которых внутренний угол больше или меньше развернутого).

Для подсчета числа классов во втором случае использовалась перечислительная теория Пойа. В такой ситуации задача всякий раз сводится к подсчету числа ожерелий, составленных из бусинок нескольких фиксированных цветов, в которых чередование бусин подчинено некоторым дополнительным ограничениям. Иногда формализация или учет этих ограничений слишком сложны и препятствуют получению общей формулы. В этих случаях мы ограничились исследованием многоугольников с небольшим числом сторон, для которых задача подсчета числа классов решается перебором.

Таблица 1

Основание классификации	**Количество сторон**			
	4	**5**	**6**	**n**
	Число классов			
1. Число опорных вершин	2	3	4	n-2
2. Чередование опорных и не опорных вершин	2	4	8	(1)
3. Число углов, больших развернутого	2	3	4	n-2
4. Чередование углов, больших и меньших развернутого	2	4	8	(1)
5. Число смен направления при обходе	2	3	4	$\lfloor n/2 \rfloor + 1$ *(при n > 4)*
6. Расположение полусвободных сторон	2	4	8	(2)
7. Число свободных сторон	2	4	6	n *(при n > 5)*
8. Расположение свободных сторон	2	4	7	?
9. Число зажатых сторон	1	2	3	n-3
10. Расположение зажатых сторон	1	2	3	?
11. Число внутренних диагоналей	2	4	7	$(n^2-5n+8)/2$
12. Число внешних диагоналей	2	4	7	$(n^2-5n+8)/2$
13. Число внутренних и внешних диагоналей	2	7	21	?

$$\sum_{m=3}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{d|(m,n)}\varphi(d)\,C_{n/d}^{m/d}+C_{\lfloor (m-n)/2\rfloor+\lfloor m/2\rfloor}^{\lfloor m/2\rfloor}\right) \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{d|(2k,n)}\varphi(d)\,C_{n/d}^{2k/d}+C_{\lfloor (n-2k)/2\rfloor+k}^{k}\right) \quad (2)$$

Отметим, что полное совпадение числа классов для всех значений n, отраженное в некоторых строках таблицы 1, не означает совпадение самих классификаций. Например, у шестиугольников, изображенных на рисунках 1 и 2, поровну опорных вершин, но различное число углов, больших развернутого. У этих же шестиугольников поровну внешних, но не внутренних диагоналей. Нами построены примеры, доказывающие, что все представленные в таблице 1 подходы приводят к разным классификациям многоугольников.

Литература

1. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Вильямс, 2004
2. Д.И. Яковенко. Задача об ожерельях. – Вестник Омского университета, 1998, Вып. 2. С. 21-24